文章编号: 1000-341X(2006)04-0846-05 **文献标识码**: A

中介命题演算系统 MP^M 的代数系统

曹汝鸣[1], 毛宇光[1,2], 陈文彬[1]
(1. 南京航空航天大学信息科学与技术学院, 江苏 南京 210016;
2. 南京大学计算机软件新技术国家重点实验室, 江苏 南京 210093)
(E-mail: caoruming@hotmail.com)

摘　要: MP^M 系统是在中介逻辑系统的基础上建立起来的, 用于处理数据库中不完全信息的三值逻辑命题演算系统. 本文通过在 MP^M 系统上建立一个代数系统, 对 MP^M 系统进行了代数抽象, 讨论了 MP^M 系统的代数性质. 本文还研究了该代数系统的次直积, 以及与其它一些代数系统之间的关系.

关键词: 中介逻辑; 命题演算系统; 代数系统; 次直不可约.
MSC(2000): 03G25
中图分类: O141.1

0 引 言

自应用数据库技术进行数据管理以来, 如何处理不完全信息一直是人们关注的重要问题. 1979 年, E. F. Codd[1] 首次提出了用三值逻辑从不完全信息数据库中抽取数据的思想. 虽然他的处理空值的方法受到某些学者的批评, 但这种方法具有明显的优点. 空值的处理可以统一在传统关系数据库框架之内, 实质上没有增加基本算法的复杂性, 而且最重要的空值类型能以切实可行的方式进行管理. 目前, 数据库查询语言 SQL2 和 SQL3 处理空值也都是以三值逻辑为基础的. R. Frost[2] (1985) 提出了利用三值逻辑处理不完全关系结构数据库的方法, 但没有形成理论体系, 仅是非形式的描述. 1991 年, K. Yue[3] 提出了利用三值逻辑处理缺失信息的一种更一般模型, 不足之处是没有给出形式系统. M. Negri[4] 等用三值逻辑讨论了 SQL 查询的形式语义, 也仅是非形式的讨论, 所用的三值逻辑系统的表达能力也较弱. 近年来, 对空值的理论研究重新引起国外许多学者关注, 探讨不完全信息系统的逻辑基础具有重要的理论价值.

中介逻辑 [5] 是朱梧木贾教授和肖奚安教授于八十年代中期共同创立的一种很有特色的三值逻辑系统. 自创立以来, 在语形、语义等方面得到了广泛的研究, 是目前研究较为彻底的一类逻辑系统. 但是由于其研究背景是为了解决数学基础中的悖论问题, 在计算机领域的实际应用中一直受到限制. MP^M 和 MF^M[6-8] 系统是在中介逻辑系统的基础上发展起来的, 是用于处理数据库中不完全信息的三值逻辑命题演算系统和三值逻辑谓词演算系统. 并且经过几年的研究, 已经取得了初步的成果. MP^M 系统还具有一些良好的代数性质, 为了便于研究 MP^M 系统的代数性质, 本文在 MP^M 系统的基础上构造了一个代数系统, 并且详细讨论了该代数系统的性质. 在文章中, 为了便于进行讨论, 将该代数系统简称为 MP^M 中介代数.

收稿日期: 2004-12-14
基金项目: 计算机软件新技术国家重点实验室 (南京大学) 开放课题: 数据库中的不完全信息与不一致信息研究; 973 计划: "海量信息系统规律、模型和维护机理研究" 子课题: 海量信息系统知识与管理研究 (G1999032701)

本文安排如下：第一部分给出了 MP^M 中介代数的定义，以及一些相关的定义．第二部分讨论了 MP^M 中介代数满足的基本性质．第三部分讨论了 MP^M 中介代数的等式类和次直积．第四部分讨论了 MP^M 中介代数与 Boolean 代数、中介代数以及 Kleene 代数等代数系统之间的关系．最后是本文的总结．

1 MP^M 中介代数的定义

定义 1.1 MP^M 中介代数是一个 $(2,2,1,1,0,0)$ 型的代数系统 $\langle M,+,*,\neg,\mu,0,1\rangle$．其中 $\langle M,+,*,\neg,0,1\rangle$ 组成 DeMorgan 代数．而一元运算 “μ” 满足以下公理： $\forall x,y\in M$

(1) $\mu\neg x=\mu x$;

(2) $\mu(xy)=x\mu y+\mu xy+\mu x\mu y$;

(3) $\mu(x+y)=\mu x\mu y+\mu x\neg y+\neg x\mu y$;

(4) $\neg xx+\mu x=\mu x$;

(5) $\mu\mu x=0$;

(6) $x+\neg x+\mu x=1$.

下面给出 MP^M 中介代数中的一些常用的概念：

定义 1.2 对于 $M=\{0,a,1\},0\le a\le 1$, 如果 $a=\neg a,\neg 0=1,\neg 1=0$, 且 $\mu a=1,\mu 0=\mu 1=0$, 则称 MP^M 中介代数系统 $\langle M,+,*,\neg,\mu,0,1\rangle$ 是标准 MP^M 中介代数系统.

定义 1.3 U 是 MP^M 中介代数系统中的一个元素，并且它满足 $\neg U=U,\mu U=1$.

2 MP^M 中介代数的基本性质

本部分给出了 MP^M 中介代数系统的基本性质，并且对其进行了证明．当将下文给出的性质中的代数运算符替换为 MP^M 中介命题演算系统的逻辑谓词时，性质仍然成立.

定理 2.1 在 MP^M 中介代数系统 $\langle M,+,*,\neg,\mu,0,1\rangle$ 中，有 $\mu 0=\mu 1=0$ 成立.

证明 由定义 1.1 可知对 MP^M 中介代数有 $\mu 0=\mu\neg 0=\mu 1$, 且 $\forall x\neq 0,1$, 有 $x+\neg x+\mu x=1$, 因为此时 $x+\neg x\neq 1$, 故只能 $\mu x=1$. 又 $\mu\mu x=0$, 所以 $\mu 0=\mu 1=\mu\mu x=0$.

定理 2.2 对 MP^M 中介代数系统 $\langle M,+,*,\neg,\mu,0,1\rangle$, 下列等式成立： $\forall x\in M$

(1) $\mu x\neg\mu x=0$;

(2) $\mu x+\neg\mu x=1$;

(3) $x\neg x=x\neg x\mu x$;

(4) $\mu^{(n)}x=0,n>2$.

证明 (1) 由定义 1.1 可知 $x+\neg x+\mu x=1$, 对上式两边作用 μ 得， $\mu(x+\neg x+\mu x)=\mu 1$. 即 $\mu(x+\neg x+\mu x)=\mu x\mu(\neg x+\mu x)+\mu x\neg(\neg x+\mu x)+\neg x\mu(\neg x+\mu x)=\mu 1=0$, 所以有 $\mu x\mu(\neg x+\mu x)=\mu x(\mu x\mu\mu x+\mu x\neg\mu x+\neg\mu x\mu\mu x)=\mu x\mu x\neg\mu x=\mu x\neg\mu x=0$. 即 $\mu x\neg\mu x=0$.

(2) 对 (1) 式两边同时作用 $\neg$ 得， $\neg(\mu x\neg\mu x)=\neg\mu x+\mu x=\neg 0=1$. 即 $\mu x+\neg\mu x=1$.

(3) 由定义 1.1 可知 $\neg xx+\mu x=\mu x$, 即 $x\neg x\le\mu x$ 成立，所以 $x\neg x\le x\neg x\mu x$; 又显然 $x\neg x\mu x\le x\neg x$, 所以 $x\neg x=x\neg x\mu x$.

(4) $\mu^{(n)}x=\mu\mu(\mu^{(n-2)}x)=0$.

定理 2.3 对 MP^M 中介代数系统 $<M,+,*,\neg,\mu,0,1>$, 下列等式成立： $\forall x,y\in M$

(1) $\mu x\mu y=\mu(xy)\mu(x+y)$;

(2) $\mu x + \mu y = \mu(xy) + \mu(x+y)$;

(3) 如果 $x \leq y \leq U$ 或者 $x \geq y \geq U$, 则 $\mu x \leq \mu y$.

证明 (1) $\mu(xy)\mu(x+y) = (\mu x\mu y + \mu xy + x\mu y)(\mu x\mu y + \mu x\neg y + \neg x\mu y) = \mu x\mu y + \mu xy\neg y + x\neg x\mu y$. 由定义 1.1 可知, $y\neg y \leq \mu y, x\neg x \leq \mu x$, 所以 $\mu xy\neg y \leq \mu x\mu y$ 且 $x\neg x\mu y \leq \mu x\mu y$. 于是 $\mu(xy)\mu(x+y) = \mu x\mu y$.

(2) $\mu(xy) + \mu(x+y) = (\mu x\mu y + \mu xy + x\mu y) + (\mu x\mu y + \mu x\neg y + \neg x\mu y) = \mu x(y + \neg y + \mu y) + \mu y(x + \neg x + \mu x) = \mu x + \mu y$.

(3) 若 $x \leq y \leq U$, 则有 $xy = x, x+y = y$ 成立, 所以 $\mu x = \mu(xy) = \mu xy + x\mu y + \mu x\mu y, \mu y = \mu(x+y) = \mu x\neg y + \neg x\mu y + \mu x\mu y$. 又 $x \leq U$, 所以 $\neg x \geq \neg U = U$, 所以 $\neg x \geq x$. 同样的 $\neg y \geq y$. 所以 $\mu x \leq \mu y$.

同理可以证明当 $x \geq y \geq U$ 时, $\mu x \leq \mu y$ 也成立.

3 MP^M 中介代数的次直积

由 MP^M 中介代数的定义可知, MP^M 中介代数系统实际上是在 De Morgan 代数的基础上通过增加了一个代数运算符 "μ" 以及一些相关性质扩充而成的, 因此 MP^M 中介代数的等式类是 De Morgan 代数等式类的子类.

Kalman 在文 [9] 中已经证明了 De Morgan 代数的次直不可约形式为 M_0, M_1 和 M_2, 而 M_0, M_1 和 M_2 的 Hasse 图如图 1 所示:

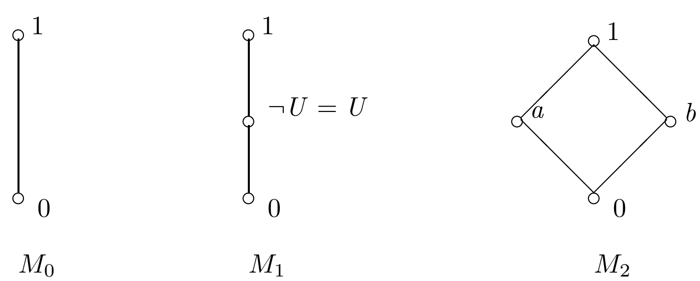

图 1 M_0, M_1, M_2 的 Hasse 图

定理 3.1 MP^M 中介代数系统的次直不可约形式是 M_0 和 M_1.

证明 显然 M_0 和 M_1 是 MP^M 中介代数的次直不可约形式.

下面要证明的是 M_2 不是 MP^M 中介代数的次直不可约形式, 我们只需要证明 M_2 不是一个 MP^M 中介代数即可. 使用反证法, 假设 M_2 是一个 MP^M 中介代数, 则对于 a, 我们有 $a = \neg a$ 且 $a + \neg a + \mu a = 1$ 成立, 所以 $a + \mu a = 1$. 因为对于 M_2 仅有 $a + b = 1$, 故 $\mu a = b$. 同理对于 $b, b = \neg b$ 且 $b + \neg b + \mu b = 1$, 即 $b + \mu b = 1$, 即 $\mu b = a$. 所以 $a = \mu b = \mu\mu a = 0, b = \mu a = \mu\mu b = 0$, 故 $a + b = 0$, 这与 M_2 中 $a + b = 1$ 矛盾. 所以 M_2 不可能是一个 MP^M 中介代数.

综上, MP^M 中介代数系统的次直不可约形式是 M_0 和 M_1.

4 MP^M 中介代数与其它代数系统的关系

MP^M 中介代数是为了便于研究 MP^M 命题演算系统的代数性质而建立的代数系统, 与早

先已经建立起来的基于经典逻辑的 Boolean 代数，基于中介逻辑的中介代数 [10] 以及 Kleene 代数 [11] 等代数系统之间有着密切的联系，下面将分别讨论 MP^M 中介代数与这些代数系统之间的关系.

定理 4.1 MP^M 中介代数是 Kleene 代数.

证明 设 $\mathbf{M}=\langle M,+,*,\neg,\mu,0,1\rangle$ 是一个 MP^M 中介代数，则显然 $\mathbf{M}$ 是 De Morgan 代数.

$\forall x\in M$, 则 $x\leq U,\neg x\geq\neg U=U$ 或 $x\geq U,\neg x\leq\neg U=U$, 所以 $x\neg x\leq U$. $\forall y\in M$, 有 $y\leq U,\neg y\geq\neg U=U$ 或 $y\geq U,\neg y\leq\neg U=U$, 所以 $y+\neg y\geq U$. 因此 $\forall x,y\in M,x\neg x\leq y+\neg y$, 所以 $\mathbf{M}$ 是 Kleene 代数.

定理 4.2 若 $\mathbf{M}=<M,+,*,\neg,\mu,0,1>$ 是一个 MP^M 中介代数系统，当且仅当 $\forall x\in M$, 有 $\mu x=0$ 成立时， $\mathbf{M}$ 是一个 Boolean 代数.

证明 因为 $\mathbf{M}$ 是一个 MP^M 中介代数, 故 M 中的元素对 $+,*$ 运算满足交换率, 结合率, 且满足第一分配率和第二分配率， 0 为零元， 1 为幺元.

如果 $\forall x\in M$, $\mu x=0$, 因为 $\mathbf{M}$ 是一个 MP^M 中介代数，有 $x+\neg x+\mu x=1$, 所以 $\forall x\in M$, $x+\neg x=1$. 又因为 $x\neg x\leq\mu x$, 所以 $x\neg x=0$. 即 $\forall x\in M$, $\neg x$ 是其补元. 故此时 $\mathbf{M}$ 是 Boolean 代数.

反之，如果 $\mathbf{M}$ 是一个 Boolean 代数，那么 $\forall x\in M$, $\neg x$ 为其补元，故 $x+\neg x=1$. 所以 $\mu(x+\neg x)=\mu x\mu\neg x+\mu xx+\neg x\mu\neg x=\mu x+\mu xx+\neg x\mu x=\mu x=\mu 1=0$. 即 $\forall x\in M$, $\mu x=0$.

定理 4.3 若 $\mathbf{M}=<M,+,*,\neg,\mu,0,1>$ 是一个 MP^M 中介代数系统， $\mu M=\{\mu xA\#|x\in M\}$, 则 $\langle\mu M,+,*,\neg,0,1\rangle$ 是一个 Boolean 代数.

证明 $\forall x\in M$, 则 $\mu x\in\mu M$, 有 $\mu x+0=\mu x,0\mu x=0,\mu x+1=1,1\mu x=\mu x$ 且 $\mu x\neg\mu x=0$, $\mu x+\neg\mu x=1$, 所以 0, 1 分别为零元和幺元， μx 和 $\neg\mu x$ 互为补元. 由于在 μM 中对 $+,*$ 的定义同 M 中一样，所以在 μM 中元素对 $+,*$ 运算满足交换率，结合率，且满足第一分配率和第二分配率. 因此 $\langle\mu M,+,*,\neg,0,1\rangle$ 是 Boolean 代数系统.

定理 4.4 对 MP^M 中介代数 $\mathbf{M}$, 如果 $\mu(0)=U$ 且 $\mu(1)=U$ 成立，则 $\mathbf{M}$ 将转化为一个中介代数；相反对于中介代数 $\mathbf{P}$, 如果 $\mu(0)=0$ 且 $\mu(1)=0$ 成立，则 P 将转化为一个 MP^M 中介代数.

证明 在 MP^M 中介代数系统 $\mathbf{M}$ 中，如果令 $\mu(0)=U$ 且 $\mu(1)=U$ 成立，则此时定义 1.1 中的公理除了 (5) 以外仍将成立，而对于公理 (5) 将有 $\mu\mu x=x+\neg x$ 成立，根据文 [10] 可知此时 $\mathbf{M}$ 满足中介代数的定义，从而转化成为一个中介代数系统.

同样地，在中介代数系统 $\mathbf{P}$ 中，如果令 $\mu(0)=0$ 且 $\mu(1)=0$ 成立，则 $\mu\mu x=0$ 成立，而 $\mu\mu x=x+\neg x$ 将不再成立，并且中介代数定义中的其余 5 条公理仍然满足. 根据定义 1.1 可知，此时 $\mathbf{P}$ 满足 MP^M 中介代数的定义，转化成为一个 MP^M 中介代数系统.

5 结束语

MP^M 中介逻辑命题演算系统是用于处理数据库中不完全信息的重要手段和工具，本文通过对 MP^M 中介逻辑命题演算系统进行代数抽象，建立了一个新的代数系统，即 MP^M 中介代数, 讨论了 MP^M 系统的代数性质, 研究了 MP^M 中介代数的次直不可约形式, 并给出了 MP^M 中介代数与 Boolean 代数、中介代数以及 Kleene 代数等代数系统之间的关系，以及相互转化的

方法. MP^M 中介代数系统是研究 MP^M 中介逻辑命题演算系统代数性质的基础.

参考文献:

[1] CODD E F. *Extending the database relational model to capture more meaning* [J]. ACM Trans. Database Syst, Dec., 1979, **4**(4): 397–434.

[2] FROST R. *Introduction to knowledge base systems* [J]. Collins Professional and Technical Books, 1986.

[3] YUE K. *A more general model for handling missing information using a 3-valued logic* [J]. SIGMOD Rec, 1991, **20**(3): 43–49.

[4] NEGRI M, PELAGATTI G, SBATTELLA L. *Formal semantics of SQL queries* [J]. ACM Trans. Database Systems, 1991, **16**(3): 513–534.

[5] 朱梧木贾，肖奚安. 数学基础概论 [M]. 南京：南京大学出版社， 1996, 236–382.
ZHU Wu-jia, XIAO Xi-an. *Introduction to Mathematics Foundation* [M]. Nan-jing University Press, Nanjing, 1996, 236–382. (in Chinese)

[6] MAO Yu-guang, HAN Bo, ZHOU Yong. et al. *Logic Foundation of Incomplete Information Database*[C]. The Proceedings of the Second Asian Workshop on Foundations of Software. Southeast University Press, Nanjing, China Dec. 2003, **3**: 10–13.

[7] MAO Yu-guang, HAN Bo, ZHU Wu-jia. *A Relational Calculus Based on Medium Logic* [C]. The Proceedings of the Second Asian Workshop on Foundations of Software. Southeast University Press, Nanjing, China Dec. 2003, **3**: 1–4.

[8] 毛宇光，徐洁磐. 用于不完全信息数据库的中介逻辑演算系统 MP^M [J]. 计算机科学 (增刊), 2001, **28**(8): 365–368, 412.
MAO Yu-guang, XU Jie-pan. *Medium logic calculus system* MP^M *used to the incomplete information database* [J]. Computer Science, Supp. 8, 2001, **28**: 365–368, 412.

[9] KALMAN J A. *Lattices with involution* [J]. Trans. Amer. Math. Soc, 1958, **87**: 485–491.

[10] 潘吟，吴望名. 中介代数 [J]. 数学研究与评论， 1990, **10**(2): 265–270.
PAN Yin, WU Wang-ming. *Medium algebra* [J]. Math. Res. Exposition, 1990, **10**(2): 265–270. (in Chinese)

[11] DESHARNAIS J, MÖLLER B. *Characterizing determinacy in Kleene algebras* [J]. Inform. Sci., 2001, **139**(3-4): 253–273.

The Algebraic System of MP^M

CAO Ru-ming[1], *MAO Yu-guang*[1,2], *CHEN Wen-bin*[1]

(1. College of Information Science and Technology, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Jiangsu 210016, China;

2. State Key Laboratory for Novel Software Technology, Nanjing University, Jiangsu 210093, China)

Abstract: MP^M is a 3-valued logic propositional calculus system which is based on the medium logic system, and it is used to deal with the incomplete information in the database. In this paper, a new type of algebra is introduced, which is an algebraic abstract of MP^M system just as Boolean algebra is an algebraic abstract of two-valued propositional calculus. The main purpose of this paper is to investigate the various properties of the new algebra.

Key words: medium logic; propositional calculus system; algebraic system; subdirectly irreducible.