

无限长密绕通电螺线管磁场简明计算

李永乐

(中国人民大学附属中学 北京 100080)

(收稿日期:2017-04-02)

摘要:通过对称性、磁场无源特点和安培环路定理,讨论了无限长密绕通电螺线管内外的磁场简明计算方法.

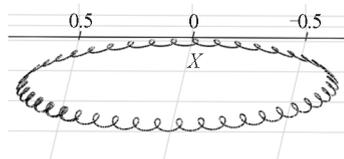
关键词:通电螺线管 磁场 安培环路定理

针对无限长密绕螺线管内外的磁场已有诸多讨论^[1],本文讨论一种没有采用由载流圆线圈轴线上磁场积分的方法,论证该种螺线管只在内部产生轴向匀强磁场的合理性.

1 密绕螺线管磁场分解

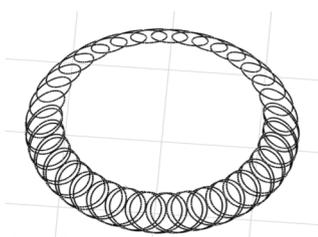
为了突出螺线管磁场最典型的特点,将密绕螺

线管的电流近似看作在半径为 R 的圆柱体上一系列的环形面电流,如图1所示,这种简化方法忽略了沿着螺线管轴向的电流.在螺线管单位长度匝数很大时,这种近似是合理的.



(x,y,z)

(e) $B=10, v_0=1$



(x,y,z)

(f) $B=30, v_0=3$

图10 小球在不同初始值时运动轨迹的数值模拟

受到扰动,在经线方向是在初位置和最大极角位移间来回做周期性的运动,经线运动周期、最大极角位移与初速度间的关系具有“抛物线对称规律”.合运动轨迹的闭合性与初始状态及速率变化量有关.若速度的变化量过大,则小球可能在某一位置脱离球面.小球在运动过程中机械能守恒,正则角动量守恒,运动的最高点或最低点的位置归于一个一元三次方程,有解析解.当匀强磁场很强(或小球的比荷很大、球面半径很大)且初速度约为零时,可以近似为小球一方面绕圆心做匀速圆周运动,同时圆心又沿纬线匀速率运动.其轨迹为摆线(或长摆线、短摆线)连续地沿纬线方向在球面上“缠绕”,其经线运动周期也可由 $T_\theta \approx \frac{2\pi m}{qB \cos \theta_0}$ 求得.

4 结束语

通过对这种球面摆运动规律的研究发现,球面摆对初速度状态值很敏感,小球在球面上做稳定匀速圆周的速度有两个值.当小球正在做匀速圆周运动时,若速率有一个变化量,则小球的运动轨迹会

参考文献

- 何广源,黄迺本.球面摆的运动方程数值模拟和实验验证.大学物理,2006,25(7):46~49
- 赵凯华.磁场中正则动量守恒定律的应用.大学物理,1988,1(3):9
- 涂德新.复合场中的守恒量.物理通报,2016(4):69~71

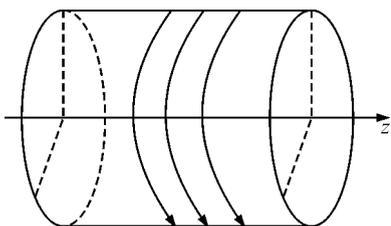


图 1 将密绕螺线管简化为环形面电流

螺线管内外任意一点的磁场均可分解为 3 个方向: 轴向 B_z , 径向 B_r 和角向 B_θ , 如图 2 所示. 螺线管无限长, 由对称性可知任意位置磁场大小都与坐标 z 和 θ 无关, 仅可能是 r 的函数; 在与螺线管轴线距离 r 相同处, 磁场各分量的大小相同.

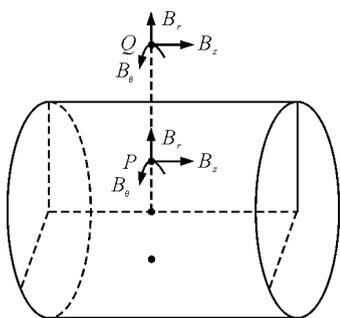


图 2 通电螺线管内外磁场的分解

2 径向磁场 B_r 等于零

如图 3 所示, 在螺线管内取一个同轴封闭圆柱, 圆柱两个底面为 S_1 和 S_2 , 侧面为 S_3 .

角向磁场分量 B_θ 不会穿透圆柱面, 轴向分量 B_z 在两个底面 S_1 和 S_2 处穿透柱面; 径向磁场 B_r 在圆柱侧面上穿透圆柱面. 根据麦克斯韦方程组

$$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{B}_z \cdot d\mathbf{S}_1 + \iint_{S_2} \mathbf{B}_z \cdot d\mathbf{S}_2 + \iint_{S_3} \mathbf{B}_r \cdot d\mathbf{S}_3 = 0 \quad (1)$$

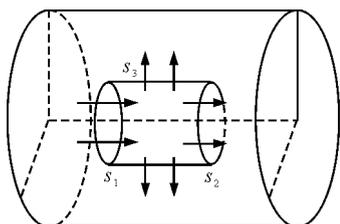


图 3 在螺线管内部取封闭圆柱

由于 B_z 场在 S_1 和 S_2 处完全相同, 故

$$\iint_{S_1} \mathbf{B}_z \cdot d\mathbf{S}_1 + \iint_{S_2} \mathbf{B}_z \cdot d\mathbf{S}_2 = 0 \quad (2)$$

这里 B_r 与圆柱侧面处处垂直, 且大小固定

$$\iint \mathbf{B}_r \cdot d\mathbf{S}_3 = B_r S_3 \quad (3)$$

将式(2)、(3)代入式(1), 得到 $B_r = 0$.

由于圆柱面半径可任意选取, 因此螺线管内部径向磁场处处为零.

求解螺线管外部磁场时, 只需将封闭圆柱面半径取得超过螺线管大小, 则可以得出相同的结果: 螺线管外部径向磁场处处为零.

3 角向磁场 B_θ 等于零

在螺线管内部取如图 4 所示与螺线管同心的封闭圆形曲线 C_1 , C_1 并未包围任何电流, 沿 C_1 列安培环路定理.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{B}_\theta \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (4)$$

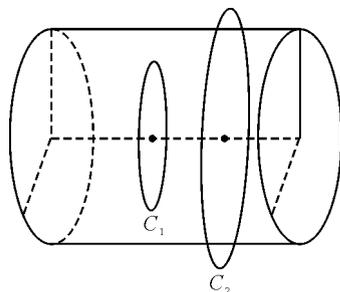


图 4 在螺线管内外取同心圆环

在圆环 C_1 上各处 B_θ 沿着曲线且大小处处相等,

$$\oint \mathbf{B}_\theta \cdot d\mathbf{l} = B_\theta \times 2\pi r = 0, \text{ 因此 } B_\theta = 0.$$

由于圆环半径 r 可以任意选取, 故螺线管内部磁场的角向分量处处为零.

如图 4 所示取大于螺线管的的封闭圆圈 C_2 , 对 C_2 列安培环路定理, 同理可得螺线管外部磁场角向分量处处为零.

4 轴向磁场 B_z 匀强

如图 5 所示, 在螺线管内部取矩形回路 $ABCD$, 其中 AD 和 BC 沿着径向. 设 AB 处轴向磁场为 B_{z1} , CD 处轴向磁场为 B_{z2} , 由于回路并未包围任何电流, 在回路上列安培环路定理

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{AB} \mathbf{B}_z \cdot d\mathbf{l} + \int_{BC} \mathbf{B}_r \cdot d\mathbf{l} + \int_{CD} \mathbf{B}_z \cdot d\mathbf{l} + \int_{DA} \mathbf{B}_r \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (5)$$

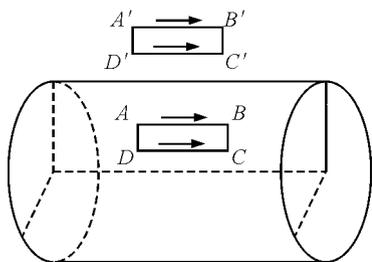


图 5 在螺线管内外取矩形回路

由 $\mathbf{B}_r = 0$, 有

$$\int_{BC} \mathbf{B}_r \cdot d\mathbf{l} = \int_{DA} \mathbf{B}_r \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (6)$$

设 $AB = CD = L$, 并设 \mathbf{B}_z 向右为正, 则

$$\int_{AB} \mathbf{B}_z \cdot d\mathbf{l} + \int_{CD} \mathbf{B}_z \cdot d\mathbf{l} = B_{z1}L - B_{z2}L \quad (7)$$

将式(6)、(7)代入式(5)得到

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = (B_{z1} - B_{z2})L = 0$$

因此

$$B_{z1} = B_{z2}$$

由于 $ABCD$ 可以任取, 因此螺线管内部磁场的轴向分量 \mathbf{B}_z 处处相同。

在螺线管外部, 可同理取闭合矩形 $A'B'C'D'$, 同样得到 \mathbf{B}_z 处处相同。

5 螺线管外部磁场为零

如图 6 所示, 取垂直于螺线管轴线的无限大平面, 平面在螺线管内部面积 S_1 , 在螺线管外部面积 S_2 . 由于磁场的无源性质, 穿过该无限大平面的磁通量为零 $\varphi = 0$, 即内部向右穿过 S_1 的磁感线, 必然通过外部 S_2 穿回平面左侧。

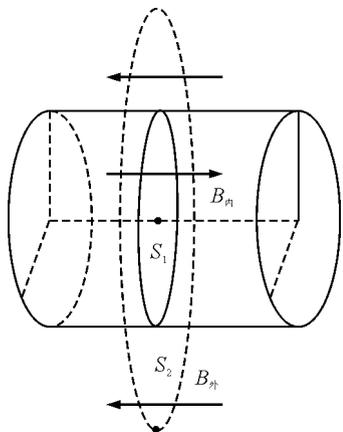


图 6 取垂直轴线的无限大平面

由于螺线管内外都是轴向匀强磁场, 有

$$\varphi = B_{\text{内}} S_1 - B_{\text{外}} S_2 = 0$$

式中 S_1 为有限值, 而 S_2 为无穷大, 故

$$B_{\text{外}} = B_{\text{内}} \frac{S_1}{S_2} = 0$$

即无限长螺线管外部磁场处处为零。

6 螺线管内部磁感应强度 $B = \mu_0 n I$

如图 7 所示, 取一边在螺线管内, 一边在螺线管外的矩形闭合回路 $ABCD$, AD 和 BC 沿着螺线管径向, AB 和 CD 平行轴线. 设 $AB = CD = L$, 每一匝电流为 I_0 , 单位长度匝数为 n , 则回路包围的电流 $I = nLI_0$.

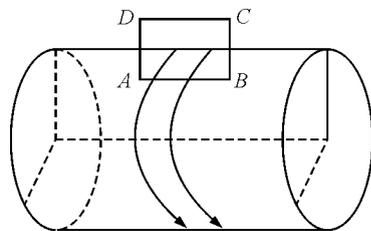


图 7 取一边在内一边在外的矩形回路

因螺线管只在内部产生轴向匀强磁场, 由安培环路定理

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{AB} \mathbf{B}_z \cdot d\mathbf{l} = B_z L = \mu_0 I = \mu_0 n I_0 L$$

可得

$$B_{\text{内}} = \mu_0 n I_0$$

7 结束语

本文首先将无限长密绕螺线管的磁场分解, 并讨论出螺线管内外的径向、角向磁场都为零, 轴向磁场都均匀, 再通过磁场无源性质讨论出螺线管外部磁场为零. 最后根据安培环路定理得出螺线管内部磁场的表达式. 讨论过程没有采用由载流圆线圈轴线上磁场积分的方法, 更容易被初学者接受。

参考文献

1 刘国良. 无限长密绕载流螺线管中磁场分布教学的不同设计. 物理通报, 2016(5):9 ~ 11