

# 单向复合纤维材料弹性系数的超声测量\*

许明翔\*\* 王耀俊

(南京大学声学研究所 南京 210093)

1994年10月25日收到

**摘要** 本文将单向复合纤维材料视作六角对称晶体,认为其弹性特征由五个独立的弹性系数来描述.利用 Christoffel 方程,我们得到这一各向异性介质中不同方向的声波速度与弹性系数的关系.我们还建立了一套计算机控制的实验测量系统,通过它对纤维板样品中的声速进行测量,反演得到了五个独立的弹性系数  $C_{11}$ 、 $C_{33}$ 、 $C_{13}$ 、 $C_{44}$  和  $C_{12}$ .理论计算得到的声速和实验测量值吻合较好,表明我们的方法是有实用意义的.

**关键词** 单向复合纤维板,弹性系数,声速,反演

## Determination of elastic constants of unidirectional composite using ultrasonic method

Xu Mingxiang, Wang Yaojun

(The Institute of Acoustics, Nanjing University, Nanjing 210093)

**Abstract** The composite concerned is treated as material of hexagonal symmetry with five independent elastic constants. The Christoffel equation is solved to give the propagation velocities of the three elastic waves in this anisotropic medium. A computer-controlled experimental system is developed for measuring the sound propagation velocities in the composite plate. The unknown five elastic constants  $C_{11}$ ,  $C_{33}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{44}$  and  $C_{12}$  are reconstructed. The velocity values calculated by using the constructed elastic constants are in good agreement with the experimental ones.

**Key words** Unidirectional composite, Elastic constants, Velocities, Reconstruction

系数密切相关<sup>[1]</sup>.

为确定某一材料的弹性系数,传统上使用静态测量方法.该方法对被测试材料是破坏性的,且切变模量和非轴向杨氏模量的测定均有一定的困难;而另一方面,由于材料中

## 1 引言

增强型纤维复合材料,由于其强度/密度比值较大,在许多领域尤其是航空工业中已得到广泛的应用.在这种材料的设计和使用过程中,人们必须定量测定其力学性能和可能发生的变化,而材料的力学性能与其弹性

\* 国家教委博士点基金和江苏省自然科学基金资助课题

\*\* 现在工作单位为中国科学院声学研究所(北京 100080)

的声波速度与其弹性系数有着密切而且复杂的关系<sup>[2]</sup>, 利用这种关系测量弹性系数则是非破坏性的, 且简单、精确<sup>[3]</sup>.

我们建立了一套计算机控制的实验系统, 以国产纤维板样品为测试对象, 并利用最小二乘法反演得到五个独立的弹性系数.

## 2 原理

作为一种各向异性材料, 增强型单向纤维

维复合材料具有与六角对称晶体非常类似的弹性特征<sup>[4]</sup>, 可用五个独立的弹性系数来表征, 它们分别为  $C_{11}$ 、 $C_{33}$ 、 $C_{13}$ 、 $C_{44}$  和  $C_{12}$ . 在材料坐标系  $0-x_1x_2x_3$  中, 假定纤维方向与  $x_3$  轴平行,  $x_1-x_2$  平面中弹性特征与方向无关. 此时, 广义 Hooke 定律可表示为(1)式. 其中,  $\sigma_i$  为应力分量,  $e_{ij}$  和  $\gamma_{ij}$  为应变分量,  $C_{ij}$  为弹性系数, 且  $C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2$ . 为求得介质中平面波的传播特性, 我们将(1)式中包含的弹性系

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (1)$$

数矩阵  $[C_{ij}]$  代入 Christoffel 方程:

$$[\Gamma_{ij} - \rho c^2 \delta_{ij}][v_j] = 0 \quad (2)$$

得到

$$\begin{bmatrix} C_{11}n_1^2 + C_{66}n_2^2 + C_{44}n_3^2 - \rho c^2 & (C_{12} + C_{66})n_1n_2 & (C_{13} + C_{44})n_1n_3 \\ (C_{12} + C_{66})n_1n_2 & C_{66}n_1^2 + C_{11}n_2^2 + C_{44}n_3^2 - \rho c^2 & (C_{13} + C_{44})n_2n_3 \\ (C_{13} + C_{44})n_1n_3 & (C_{13} + C_{44})n_2n_3 & C_{44}n_1^2 + C_{44}n_2^2 + C_{33}n_3^2 - \rho c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中,  $v_1, v_2, v_3$  为介质质点位移分量,  $n_1, n_2, n_3$  为声波波矢的方向余弦,  $\rho$  为材料密度,  $c$  为声波速度.

在本文中, 我们选定纤维材料为平板状, 如图 1 所示. 仍假定纤维方向与  $x_3$  轴平行, 且  $x_1-x_3$  平面与板平面平行. 当入射平面(图 1 中的平面  $\gamma$ )与纤维方向的夹角为  $\varphi$ , 则板中声波波矢的方向余弦可表示为

$$\begin{aligned} n_1 &= \sin\varphi \sin\theta, \\ n_2 &= \cos\theta, \end{aligned}$$

$$n_3 = \cos\varphi \sin\theta, \quad (4)$$

其中,  $\theta$ , 为声波在板中折射角. 假定板的两面均为无限大的流体负载, 其密度和声速分别为  $\rho_f$  和  $c_f$ . 这样, 对于某个  $\varphi$ , 由 Christoffel 方程就可以求出不同折射角  $\theta$ , 时的声波速度  $c$ , 且满足 Snell 定律:

$$\sin\theta_j/c_j = \sin\theta_i/c_f \quad (5)$$

可见, 某一确定方向上的声波速度与弹性系数是密切相关的. 以  $\varphi=45^\circ$  为例, 此时  $n_1 = \sqrt{2} \sin\theta/2$ ,  $n_2 = \cos\theta$ ,  $n_3 = \sqrt{2} \sin\theta/2$ , 由

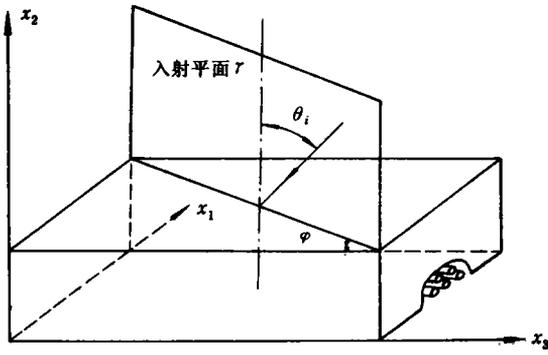


图1 声波斜入射测单向纤维板

(3)式, 得到关于  $\rho c^2$  的一三次方程

$$E_1(\rho c^2)^3 + E_2(\rho c^2)^2 + E_3(\rho c^2) + E_4 = 0 \quad (6)$$

解这个方程, 得到三个速度, 分别对应于一个准纵波和两个准切变波. 方程的系数  $E_1$ 、 $E_2$ 、 $E_3$  和  $E_4$  见附录. 实际上, 下面我们正是利用了声波速度和弹性系数的关系来进行弹性系数反演的.

### 3 实验装置和测量结果

为了完成纤维板弹性系数的测量, 我们建立了一套自动测试系统, 如图2所示. 其中待测样品为 T300/Qy8911 单向树脂纤维板, 该样品由 16 薄层叠合而成. 耦合流体及纤维板样品的物理参数如下: 对流体,  $\rho_f = 1.0 \text{ g/cm}^3$ ,  $c_f = 1.5 \times 10^3 \text{ m/sec}$ ; 对纤维板,  $\rho = 1.75 \text{ g/cm}^3$ ,  $h = 1.9 \text{ mm}$ . 测量系统中, 使用 PZT 压电陶瓷平面波宽带换能器, 发射及接收换能器分别具有 5.0 MHz 和 1.4 MHz 的中心频率. 测试样品通过步进电机的控制, 不断改变声波的人射角度. 电机脉冲当量为  $0.36^\circ/\text{脉冲}$ , 控制信号由计算机发出. 计算机同时通过 GPIB 接口对数字存储示波器进行控制, 以实现对接收信号的采集处理. 测量中使用窄脉冲作为激励源, 脉宽小于 50 ns, 峰值-330 v, 重复频率 0—5 kHz.

图3为板中声速测量示意图. 声速  $c_s$  与两换能器间有、无板时的时间差  $t_s$  之间的关系为

$$c_s = c_f / \sqrt{1 + q^2 - 2q \cos \theta_i} \quad (7)$$

其中,  $q = c_s t_s / h$ . 值得一提的是, 实验测量的速度是能量速度, 但对于板状材料而言, 其数值可作为相速直接用于弹性系数的计算<sup>[5]</sup>.

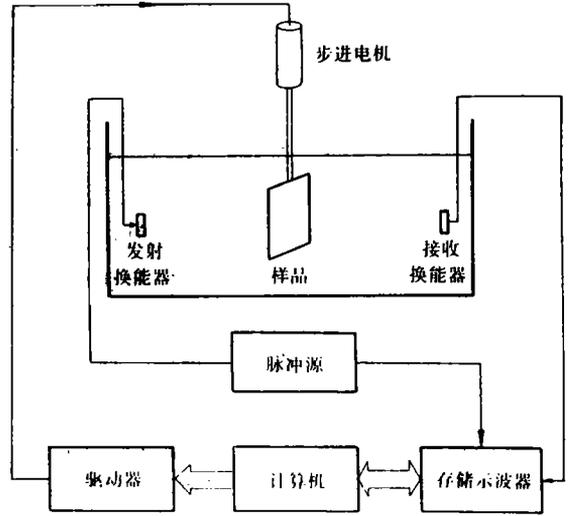


图2 超声宽频带实验测试系统框图

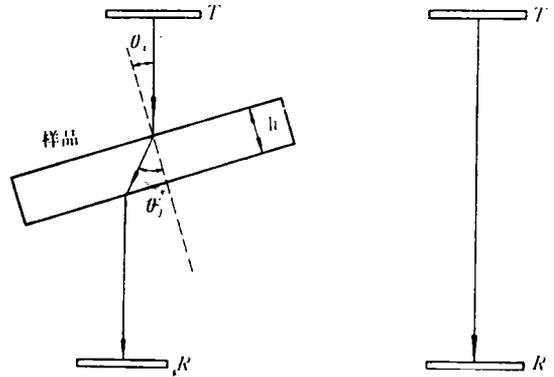


图3 测量声传播时间差求板中声速

测量时, 如果声波入射平面与样品对称平面平行(重合), 从测得的声速不能全部反演出五个弹性系数, 此时某些弹性系数对声速不敏感. 例如,  $\varphi = 0^\circ$  时测得的速度就与  $C_{12}$  无关. 我们选定  $\varphi = 45^\circ$ , 此时只要在不同入射角下作足够多次的测量, 即可全部反演出  $C_{11}$ 、 $C_{12}$ 、 $C_{13}$ 、 $C_{14}$  和  $C_{12}$  这五个独立的弹性系数. 假

定我们得到  $M$  个速度测量值  $c_m^{(e)}$  ( $m=1, 2, \dots, M$ )；根据(6)式，赋给  $C_{11}$ 、 $C_{33}$ 、 $C_{13}$ 、 $C_{44}$  和  $C_{12}$  一定的初值，并让它们逐个变化，对每一组假定的弹性系数，均可得到相应角度下的速度计算值  $c_m^{(c)}$  ( $m=1, 2, \dots, M$ )，令

$$d = \sum_{m=1}^M (c_m^{(e)} - c_m^{(c)})^2 \quad (8)$$

当  $d$  取到最小值时，即认为此时弹性系数的假定值为最后测量结果：

$C_{11}=17.7$  GPa,  $C_{33}=114$  GPa,  $C_{13}=2.9$  GPa,  $C_{44}=8.2$  GPa,  $C_{12}=7.0$  GPa.

测量中，我们根据垂直入射反射最大的特点首先确定了零度入射角，于是，根据样品的相对移动就可以准确得到入射角度，而且，这样也必然能保证样品旋转过程中  $\varphi$  始终不变。

将上面弹性系数值代入(6)，把得到的声速理论计算曲线与实验测量结果相比较，如图4，二者吻合较好，表明测量有较高的精度。

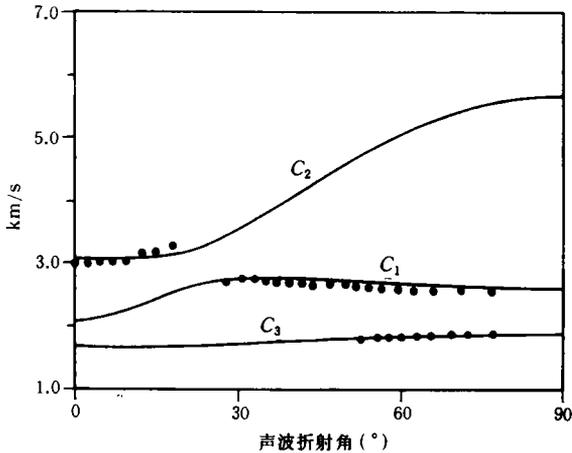


图4  $\varphi=45^\circ$ 时声速的理论计算结果(—)与实验测量值(·)对照图  
 $C_2$  为准纵波速度  
 $C_1$  和  $C_3$  为准切变波速度

## 4 结语

利用上述测试系统测量纤维板中不同方

向上的声波速度，就可以成功地反演得到材料的弹性系数。这一超声动态方法，具有成本低、精度高、简便易行的特点，在实际应用中值得借鉴。为了更加准确地确定纤维板的弹性特征，除了提高测试设备的精度外，采用更加复杂的模型来模拟纤维材料也是应该考虑的。文中提到的测试系统，用于层状材料声传播特性及界面问题的实验研究同样是方便的。

## 附录

方程(6)的系数表达式：

$$E_1 = -1$$

$$E_2 = A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

$$E_3 = A_{13}^2 + A_{12}^2 + A_{23}^2 - A_{11}A_{22} - A_{11}A_{33} - A_{22}A_{33}$$

$$E_4 = 2A_{12}A_{13}A_{23} + A_{11}A_{22}A_{33} - A_{13}^2A_{22} - A_{12}^2A_{33} - A_{23}^2A_{11}$$

其中

$$A_{11} = C_{11}\sin^2\theta_j/2 + C_{66}\cos^2\theta_j + C_{44}\sin^2\theta_j/2$$

$$A_{22} = C_{66}\sin^2\theta_j/2 + C_{11}\cos^2\theta_j + C_{44}\sin^2\theta_j/2$$

$$A_{33} = C_{44}\sin^2\theta_j/2 + C_{44}\cos^2\theta_j + C_{33}\sin^2\theta_j/2$$

$$A_{23} = \sqrt{2}(C_{13} + C_{44})\sin\theta_j\cos\theta_j$$

$$A_{13} = (C_{13} + C_{44})\sin\theta_j\cos\theta_j$$

$$A_{12} = \sqrt{2}(C_{12} + C_{66})\sin\theta_j\cos\theta_j$$

致谢 感谢航天部 625 所赵渠森教授为我们提供了纤维板测试样品。

## 参 考 文 献

- [1] Christensen R M., *Mechanics of Composite Materials* (Wiley, New York, 1979).
- [2] Neighbours J R., Schacher, G. E., *J. Appl. Phys.* 1967, **38**(13), 5366—5375.
- [3] Rokhlin S I., Wang W., *J. Acoust. Soc. Am.* 1989, **86** (5), 1876—1882.
- [4] Zimmer J E., Cost J R., *J. Acoust. Soc. Am.* 1970, **47** (3), 795—803.
- [5] Rokhlin S I., Wang W., *J. Acoust. Soc. Am.* 1993, **94** (5), 2712—2730.