Vol. 36 (2016)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

半平面内随机 Dirichlet 级数的增长性

王 琼 [1], 杨 祺 [1], 袁文俊 [2], 田宏根 [1]
(1. 新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830054)
(2. 广州大学数学与信息科学学院, 广东 广州 510006)

摘 要: 本文研究了右半平面上有限正级随机 Dirichlet 级数的增长性. 利用 Knopp-Kojima 的方法, 获得了两类随机 Dirichlet 级数关于型的三个结果, 推广了半平面上有限级随机 Dirichlet 级数增长性的研究范围.

关键词: 随机 Dirichlet 级数; 型; Knopp-Kojima 方法
MR(2010) **主题分类号**: 30B50 **中图分类号**: O174.52
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2016)02-0409-10

1 引言与引理

Dirichlet 级数和随机 Dirichlet 级数的增长性是许多作者关注的课题, 在国内已经取得了不少成果, 见文献 [1–4]. 文献 [5] 采用 Knopp-Kojima 的方法, 得到了随机 Dirichlet 级数在右半平面上的增长性. 本文利用 Knopp-Kojima 的方法和型函数, 研究了右半平面上两类有限正级随机 Dirichlet 级数的增长性, 分析了这两类随机 Dirichlet 级数在右半平面内的型与系数的关系, 并得到了在右半平面内的增长性与在任意水平半带形内 (或任意水平半直线上) 的增长性在一定条件下几乎必然相等的结论.

考虑概率空间 (Ω, A, P), 其中 $\Omega = [0,1]$, A 是由 $[0,1]$ 上所有 Lebesgue 可测集 E 组成, 而且 $P(E)$ 就是 E 的 Lebesgue 测度, 作 Rademacher 函数序列 $\{\varepsilon_n(\omega)\}$ 及 Steinhaus 函数序列 $\{r_n(\omega)\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 其中 $r_n(\omega) = \exp(2\pi i\theta_n(\omega))$. 这两列序列分别可看作 (Ω, A, P) 上的独立随机变量序列, 并且

$$P[\varepsilon_n(\omega) = 1] = P[\varepsilon_n(\omega) = -1] = \frac{1}{2},$$

$\theta_n(\omega)$ 的值在 $[0,1]$ 上均匀分布, 见文献 [3].

考虑随机 Dirichlet 级数

$$f_1(s,\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\varepsilon_n(\omega)e^{-\lambda_n s}, \tag{1.1}$$

$$f_2(s,\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n r_n(\omega)e^{-\lambda_n s}, \tag{1.2}$$

*收稿日期: 2014-11-14 接收日期: 2015-3-24
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11461070; 11271090); 广东省自然科学基金资助 (S2012010010121); 新疆研究生科研创新项目 (XJGRI2015106).

作者简介: 王琼 (1991–), 女, 河南新蔡, 硕士, 主要研究方向: 复分析.

相对应的 Dirichlet 级数记为

$$f(s)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n e^{-\lambda_n s}, \tag{1.3}$$

其中 $s=\sigma+it\ (\sigma,t\in R)$, $\{b_n\}$ 为复常数序列, $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n\uparrow+\infty$. 级数 (1.1) 和级数 (1.2) 的情况完全类似. 下面只讨论级数 (1.1).

对 $\omega\in\Omega$ 给定时, 级数 (1.1) 就变为了一般 Dirichlet 级数, 设级数 (1.1) 的收敛横坐标、一致收敛横坐标及绝对收敛横坐标分别为 $\sigma_c(\omega)$、$\sigma_u(\omega)$ 及 $\sigma_a(\omega)$, 见文献 [5].

引用 Knopp-Kojima 的方法, 定义对于任意 $k\in N$, 若

$$[k,k+1)\cap\{\lambda_n\}=\{\lambda_{n_k},\lambda_{n_k+1},\cdots,\lambda_{n_k+p_k}\}\neq\varnothing, \tag{1.4}$$

令

$$\overline{B}_k=\sup_{0\le p\le p_k,t\in R}|\sum_{j=0}^{p} b_{n_k+j}e^{-it\lambda_{n_k+j}}|,\ \ B_k^*=\sum_{j=0}^{p_k}|b_{n_k+j}|,$$

对 $\omega\in\Omega$, 令

$$\overline{B}_k(\omega)=\sup_{0\le p\le p_k,t\in R}|\sum_{j=0}^{p} b_{n_k+j}\varepsilon_{n_k+j}(\omega)e^{-it\lambda_{n_k+j}}|,\ \ B_k^*(\omega)=\sum_{j=0}^{p_k}|b_{n_k+j}\varepsilon_{n_k+j}(\omega)|,$$

若 $[k,k+1)\cap\{\lambda_n\}=\varnothing$, 那么令 $\ln B_k^*(\omega)=\ln\overline{B}_k(\omega)=-\infty$ a.s..

对于级数 (1.3), 若 $\sigma_u=0$, 当 $\sigma>\sigma_u$ 时, 记

$$\begin{aligned}
&M(\sigma)=\sup\{|f(\sigma+it)|:t\in R\},\\
&\overline{M}_u(\sigma)=\sup\{|\sum_{j=0}^{n} b_j e^{-\lambda_j(\sigma+it)}|:n\in N,t\in R\},\overline{m}(\sigma)=\max\{\overline{B}_k e^{-k\sigma}:k\in N\}.
\end{aligned}$$

对于级数 (1.1), 设 $\sigma_u(\omega)=0$ a.s., 当 $\sigma>\sigma_u(\omega)$ 时, 对 $\omega\in\Omega$, 记

$$\begin{aligned}
&\overline{M}_u(\sigma,\omega)=\sup\{|\sum_{j=0}^{n} b_j\varepsilon_j(\omega)e^{-\lambda_j(\sigma+it)}|:n\in N,t\in R\},\\
&m(\sigma,\omega)=\max\{|b_n\varepsilon_n(\omega)|e^{-\lambda_n\sigma}:n\in N\},\\
&\overline{M}_u(\sigma,\alpha,\beta,\omega)=\sup\{|\sum_{j=0}^{n} b_j\varepsilon_j(\omega)e^{-\lambda_j(\sigma+it)}|:n\in N,t\in(\alpha,\beta)\},\\
&\overline{M}_u(\sigma+it,\omega)=\sup\{|\sum_{j=0}^{n} b_j\varepsilon_j(\omega)e^{-\lambda_j(\sigma+it)}|:n\in N,t\in R\}.
\end{aligned}$$

对于级数 (1.3), 若 $\sigma_u=0$, 当 $\sigma>\sigma_u$ 时, 定义它的级 (见文献 [2]) 为

$$\rho=\overline{\lim_{\sigma\to0^+}}\frac{\ln^+\ln^+\overline{M}_u(\sigma)}{-\ln^+\sigma},$$

若 $0<\rho<\infty$, 定义它的型 (见文献 [2]) 为

$$T=\overline{\lim_{\sigma\to 0^+}}\frac{\ln^+\overline{M}_u(\sigma)}{\frac{1}{\sigma^\rho}}.$$

设级数 (1.3) 满足 $\sigma_u=0$ 且为有限正级, 由文献 [3] 引进连续函数 $\rho(r)$ $(r>0)$, 它在每点有左右导数, 并且满足

$$\lim_{r\to+\infty}\rho(r)=\rho,\quad \lim_{r\to+\infty}\rho'(r)r\ln r=0$$

以及

$$\overline{\lim_{\sigma\to 0^+}}\frac{\ln^+\overline{M}_u(\sigma)}{U(\frac{1}{\sigma})}=T\ (0<T<\infty),$$

其中

$$U(r)=r^{\rho(r)}\ (r>0),\tag{1.5}$$

则称 T 为右半平面上有限正级 Dirichlet 级数 (1.3) 关于型函数 $U(r)$ 的型. 设

$$t=rU(r),\ \ r=W(t)\ \ (r>0,t>0)\tag{1.6}$$

互为反函数, 有

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{U(kr)}{U(r)}=k^\rho,\ \lim_{t\to+\infty}\frac{W(kt)}{W(t)}=k^{\frac{1}{\rho+1}}\ \ (0<k<+\infty).$$

对于级数 (1.1), 若 $\sigma_u(\omega)=0$ a.s., 当 $\sigma>\sigma_u(\omega)$ 时, 定义它的级 (见文献 [3]) 为

$$\rho(\omega)=\overline{\lim_{\sigma\to 0^+}}\frac{\ln^+\ln^+\overline{M}_u(\sigma,\omega)}{-\ln^+\sigma},$$

若 $0<\rho(\omega)<\infty$, 定义它在右半平面上关于型函数 $U(r)$ 的型 (文献 [3]) 为

$$T(\omega)=\overline{\lim_{\sigma\to 0^+}}\frac{\ln^+\overline{M}_u(\sigma,\omega)}{U(\frac{1}{\sigma})};$$

在水平半带形内关于型函数 $U(r)$ 的型 (文献 [3]) 为

$$T'(\omega)=\overline{\lim_{\sigma\to 0^+}}\frac{\ln^+\overline{M}_u(\sigma,\alpha,\beta,\omega)}{U(\frac{1}{\sigma})},$$

其中 α, β $(\alpha<\beta)$ 为任何实数; 在水平半直线上关于型函数 $U(r)$ 的型 (见文献 [2]) 为

$$T''(\omega)=\overline{\lim_{\sigma\to 0^+}}\frac{\ln^+\overline{M_u}(\sigma+it,\omega)}{U(\frac{1}{\sigma})},$$

由于 $\{\varepsilon_n(\omega)\}$ 是独立的随机变量, 故 $\rho(\omega),T(\omega),T'(\omega),T''(\omega)$ 几乎必然是常数.

下面介绍几个引理.

引理 1 [4] 对于右半平面上的有限正级 Dirichlet 级数 (1.3), 有

$$\overline{\lim_{\sigma\to 0^+}}\frac{\ln^+\overline{M_u}(\sigma)}{U(\frac{1}{\sigma})}=T\Leftrightarrow\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{W(k)\ln^+\overline{B}_k}{k}=\frac{\rho+1}{\rho^{\frac{\rho}{\rho+1}}}T^{\frac{1}{\rho+1}}.$$

引理 2 [3] 设 a 及 λ 是正常数, 那么

$$\phi(\sigma)=aU(\frac{1}{\sigma})+\sigma\lambda\ (\sigma>0),$$

在 $\sigma=[(a\rho)^{\frac{1}{\rho+1}}/W(\lambda)](1+\circ(1))\ (\lambda\to+\infty)$ 时达到最小值

$$a^{\frac{1}{\rho+1}}\frac{\rho+1}{\rho^{\frac{\rho}{\rho+1}}}\cdot\frac{\lambda}{W(\lambda)}(1+\circ(1)),$$

其中函数 U 和函数 W 是由 (1.5), (1.6) 式确定的.

引理 3[3] 对于级数 (1.1), $\forall\omega\in\Omega$, a.s. $\exists N(\omega)>0$ 使得 $\forall n>N(\omega)$, 有 $n^{-k_0}\le\mid\varepsilon_n(\omega)\mid\le n^{k_0}$ $(k_0\in N^+)$.

引理 4 [5] 对于级数 (1.3), 若 $\sigma_u=0$, 则对任意的 $\varepsilon\in[0,1]$, 当 $\sigma>0$, 有

$$\overline{m}(\sigma)\le 4e^{\sigma}\overline{M_u}(\sigma)\le K(\varepsilon)e^{\sigma}\frac{\overline{m}((1-\varepsilon)\sigma)}{\sigma},$$

其中 $K(\varepsilon)$ 是一个与 ε 和 $f(s)$ 有关的正数.

由文献 [6] 可得出

引理 5 对于级数 (1.3) 满足 $\sigma_u=0$ 和任意的 $\sigma>\sigma_u$, $I\subseteq R$, 有 $M(\sigma,I)\le\overline{M}_u(\sigma,I)$, 其中

$$M(\sigma,I)=\sup\{\mid f(\sigma+it)\mid: t\in I\},$$
$$\overline{M}_u(\sigma,I)=\sup\{\mid\sum_{j=0}^{n}b_je^{-\lambda_j(\sigma+it)}\mid: n\in N, t\in I\}.$$

推论 1 对于级数 (1.1) 满足 $\sigma_u(\omega)=0$ a.s., 则对任意 $\sigma>\sigma_u(\omega)$, $\omega\in\Omega$, $I\subseteq R$, 有 $M(\sigma,I,\omega)\le\overline{M}_u(\sigma,I,\omega)$.

引理 P.-Z. [2,6] 设 E 是 Ω 中满足 $P[E]>0$ 的任何事件, 那么 $\exists\ N=N(E)\in N$, $\exists\ e'=e(E)\in N$, 使得对与任何序列 $\{c_n\}\subset C$, $\forall N'>N$, 有

$$\int_E\mid\sum_{n=N}^{N'}c_n\varepsilon_n(\omega)\mid^2 P(d\omega)\ge e'\sum_{n=N}^{N'}\mid c_n\mid^2,$$
$$\int_E\mid\sum_{n=N}^{N'}c_n\varepsilon_n(\omega)\mid^2 d\omega\ge\frac{1}{2}P[E]\sum_{n=N}^{N'}\mid c_n\mid^2,\ \int_E\mid\sum_{n=N}^{N'}c_nr_n(\omega)\mid^2 d\omega\ge\frac{1}{2}P[E]\sum_{n=N}^{N'}\mid c_n\mid^2.$$

2 定理及其证明

定理 1 设有限正级随机 Dirichlet 级数 (1.1) 满足 $\sigma_u(\omega)=0$ a.s., 且 (1.4) 式中 p_k 满足 $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}\ln^+(p_k+1)^{\frac{W(k)}{k}}=0$, 则有

$$\overline{\lim_{\sigma\to0^+}}\frac{\ln^+\overline{M}_u(\sigma,\omega)}{U(\frac{1}{\sigma})}=T\quad\text{a.s.}\Leftrightarrow\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{W(k)\ln^+\overline{B}_k}{k}=\frac{\rho+1}{\rho^{\frac{\rho}{\rho+1}}}T^{\frac{1}{\rho+1}}.$$

证 由引理 1, 只需证明 $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}\frac{W(k)\ln^+\overline{B}_k}{k}=\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}\frac{W(k)\ln^+\overline{B}_k(\omega)}{k}$ a.s.. 首先证明 T 为有限正数的情形, 在推论 1 中取 $I=R$, 则 $M(\sigma,\omega)\le\overline{M}_u(\sigma,\omega)$, 从而

$$\overline{\lim_{\sigma\to0^+}}\frac{\ln^+M(\sigma,\omega)}{U(\frac{1}{\sigma})}\le\overline{\lim_{\sigma\to0^+}}\frac{\ln^+\overline{M}_u(\sigma,\omega)}{U(\frac{1}{\sigma})}=T\ \text{ a.s.},$$

则对任给 $\varepsilon>0$, $\omega\in\Omega$ a.s., 当 $\sigma>0$ 且充分小时, 有 $m(\sigma,\omega)\le M(\sigma,\omega)<\exp[(T+\varepsilon)U(\frac{1}{\sigma})]$, 即

$$|\ b_k\ |\ e^{-\lambda_k\sigma}=|\ b_k\varepsilon_k(\omega)\ |\ e^{-\lambda_k\sigma}\le m(\sigma,\omega)<\exp[(T+\varepsilon)U(\frac{1}{\sigma})]\ \text{ a.s..}$$

于是当 $\lambda_{n_k+j}\in[k,k+1)\ \ (j=0,1,\cdots,p_k)$ 且 $k>N$ 时, 有

$$\overline{B}_ke^{-k\sigma}\le B_k^*e^{-k\sigma}\le\sum_{j=0}^{p_k}|\ b_{n_k+j}\ |\ e^{-\lambda_{n_k+j}\sigma}<(p_k+1)\exp[(T+\varepsilon)U(\frac{1}{\sigma})].$$

即

$$\overline{B}_k<(p_k+1)\exp[(T+\varepsilon)U(\frac{1}{\sigma})+k\sigma].$$

又由引理 2 得 $\overline{B}_k\le(p_k+1)\exp[(T+\varepsilon)^{\frac{1}{\rho+1}}\cdot\frac{\rho+1}{\rho^{\frac{\rho}{\rho+1}}}\cdot\frac{k}{W(k)}(1+\circ(1))]$, 从而

$$\frac{W(k)\ln^+\overline{B}_k}{k}\le\frac{W(k)\ln^+(p_k+1)}{k}+(T+\varepsilon)^{\frac{1}{\rho+1}}\cdot\frac{\rho+1}{\rho^{\frac{\rho}{\rho+1}}}(1+\circ(1)),$$

由条件 $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}\ln^+(p_k+1)^{\frac{W(k)}{k}}=0$, 可得

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{W(k)\ln^+\overline{B}_k}{k}\le\frac{\rho+1}{\rho^{\frac{\rho}{\rho+1}}}(T+\varepsilon)^{\frac{1}{\rho+1}},$$

由 ε 的任意性, 故 $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}\frac{W(k)\ln^+\overline{B}_k}{k}\le\frac{\rho+1}{\rho^{\frac{\rho}{\rho+1}}}T^{\frac{1}{\rho+1}}$.

下证 $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}[\frac{W(k)\ln^+\overline{B}_k}{k}\cdot\frac{\rho^{\frac{\rho}{\rho+1}}}{\rho+1}]^{\rho+1}<T$ 不成立, 否则存在 $T'<T$ 使得下式成立

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}}[\frac{W(k)\ln^+\overline{B}_k}{k}\cdot\frac{\rho^{\frac{\rho}{\rho+1}}}{\rho+1}]^{\rho+1}<T'.$$

由引理 1 得

$$\overline{\lim_{\sigma\to0^+}}\frac{\ln^+\overline{M}_u(\sigma)}{U(\frac{1}{\sigma})}<T'.$$

对任给 $\varepsilon>0$, 当 $\sigma>0$ 且充分小时, 有 $\overline{M}_u(\sigma)<\exp[(T'+\varepsilon)U(\frac{1}{\sigma})]$.

在引理 5 中, 取 $I=R$, 有 $M(\sigma)\le\overline{M}_u(\sigma)$, 从而 $\forall\varepsilon>0$, 当 σ 为充分小的正数时, $\forall n\in N$, 有

$$|\ b_n\ |\ e^{-\lambda_n\sigma}<\exp[(T'+\varepsilon)U(\frac{1}{\sigma})],$$

$$|\ b_n\varepsilon_n(\omega)\ |\ e^{-\lambda_n\sigma}=|\ b_n\ |\ e^{-\lambda_n\sigma}<\exp[(T'+\varepsilon)U(\frac{1}{\sigma})]\ \text{ a.s..}$$

于是当 $\lambda_{n_k+j}\in[k,k+1)$ $(j=0,1,\cdots,p_k)$ 且 $k>N$ 时, 有

$$\begin{aligned}\overline{B}_k(\omega)e^{-k\sigma} &\le B_k^*(\omega)e^{-k\sigma}\le\sum_{j=0}^{p_k}\mid b_{n_k+j}\varepsilon_{n_k+j}(\omega)\mid e^{-\lambda_{n_k+j}\sigma}\\ &< (p_k+1)\exp[(T'+\varepsilon)U(\frac{1}{\sigma})]\ \text{a.s.},\\ \overline{B}_k(\omega) &< (p_k+1)\exp[(T'+\varepsilon)U(\frac{1}{\sigma})+k\sigma].\end{aligned}$$

再结合引理 2, 在 $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}\ln^+(p_k+1)^{\frac{W(k)}{k}}=0$ 下得

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}}[\frac{W(k)\ln^+\overline{B}_k(\omega)}{k}\cdot\frac{\rho^{\frac{\rho}{\rho+1}}}{\rho+1}]^{\rho+1}\le T'+\varepsilon\ \text{a.s.}.$$

由 ε 的任意性, 故 $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}[\frac{W(k)\ln^+\overline{B}_k(\omega)}{k}\cdot\frac{\rho^{\frac{\rho}{\rho+1}}}{\rho+1}]^{\rho+1}\le T'$ a.s., 即

$$\overline{\lim_{\sigma\to0^+}}\frac{\ln^+\overline{M}_u(\sigma,\omega)}{U(\frac{1}{\sigma})}\le T'<T\ \text{a.s.}.$$

故假设不成立. 充分性成立.

命题的必要性也成立, 反之, 若 $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}\frac{W(k)\ln^+\overline{B}_k}{k}=\frac{\rho+1}{\rho^{\frac{\rho}{\rho+1}}}T^{\frac{1}{\rho+1}}$, 而 $\overline{\lim\limits_{\sigma\to0^+}}\frac{\ln^+\overline{M}_u(\sigma,\omega)}{U(\frac{1}{\sigma})}=T'<T$ a.s., 则 $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}\frac{W(k)\ln^+\overline{B}_k}{k}=\frac{\rho+1}{\rho^{\frac{\rho}{\rho+1}}}T'^{\frac{1}{\rho+1}}<\frac{\rho+1}{\rho^{\frac{\rho}{\rho+1}}}T^{\frac{1}{\rho+1}}$, 矛盾. 类似可证 $T=\infty$, $T=0$ 时命题也成立.

定理 2 设有限正级随机 Dirichlet 级数 (1.1) 满足 $\sigma_u(\omega)=0$ a.s., 且 (1.4) 式中 p_k 满足 $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}\ln^+(p_k+1)^{\frac{W(k)}{k}}=0$, 则随机级数 (1.1) a.s. 具有下面的性质: 对任意的实数 α, β $(\alpha<\beta)$, 有 $\overline{\lim\limits_{\sigma\to0^+}}\frac{\ln^+\overline{M}_u(\sigma,\omega)}{U(\frac{1}{\sigma})}=\overline{\lim\limits_{\sigma\to0^+}}\frac{\ln^+\overline{M}_u(\sigma,\alpha,\beta,\omega)}{U(\frac{1}{\sigma})}$ a.s..

证 设上式左边的上极限为 T a.s., 当 $T=0$ 时结论显然成立. 设 $0<T\le+\infty$. 假设在 Ω 中有一概率大于零的事件 E, 相应的有一正数 $T'<T$, 使得对于 $\omega\in E$ 以及某两实数 α, β $(\alpha<\beta)$, 有

$$\overline{\lim_{\sigma\to0^+}}\frac{\ln^+\overline{M}_u(\sigma,\alpha,\beta,\omega)}{U(\frac{1}{\sigma})}<T'\ \text{a.s.}.$$

在推论 1 中取 $I=(\alpha,\beta)$, 则有

$$M(\sigma,\alpha,\beta,\omega)\le\overline{M}_u(\sigma,\alpha,\beta,\omega),$$

从而有 $\overline{\lim\limits_{\sigma\to0^+}}\frac{\ln^+M(\sigma,\alpha,\beta,\omega)}{U(\frac{1}{\sigma})}<T'$ a.s., 那么当 σ 为充分小的正数和 $n>N$ 时, 对任意 $t\in(\alpha,\beta)$, $\omega\in E$ 有

$$\mid\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\varepsilon_n(\omega)e^{-\lambda_n(\sigma+it)}\mid<\exp(T'U(\frac{1}{\sigma})),$$

因此

$$\mid\sum_{n=N}^{+\infty}b_n\varepsilon_n(\omega)e^{-\lambda_n(\sigma+it)}\mid<2\exp(T'U(\frac{1}{\sigma})).$$

上述的 $N=N(E)$ 是按 P.-Z. 引理选定的. 于是当 $\sigma>0$ 时, 由 P.-Z. 引理得

$$\frac{1}{2}P[E]\sum_{n=N}^{N'}\mid b_n\mid^2 e^{-2\lambda_n\sigma}\leq\int_E\mid\sum_{n=N}^{N'}b_n\varepsilon_n(\omega)e^{-\lambda_n(\sigma+it)}\mid^2 d\omega\ \ (N'>N).$$

又由于

$$\mid\sum_{n=N}^{N'}b_n\varepsilon_n(\omega)e^{-\lambda_n(\sigma+it)}\mid\leq\sum_{n=0}^{+\infty}\mid b_n\mid e^{-\lambda_n\sigma}<+\infty\ (\sigma>0),$$

所以当 σ 为充分小的正数时, 有

$$\sum_{n=N}^{+\infty}\mid b_n\mid^2 e^{-2\lambda_n\sigma}\leq\frac{2}{P(E)}\int_E\mid\sum_{n=N}^{+\infty}b_n\varepsilon_n(\omega)e^{-\lambda_n(\sigma+it)}\mid^2 d\omega\leq 8\exp(2T'U(\frac{1}{\sigma})).$$

这样当 σ 为充分小的正数, $n\geq N$ 时, 有

$$\mid b_n\mid e^{-\lambda_n\sigma}<3\exp(T'U(\frac{1}{\sigma})).$$

因此当 $\lambda_{n_k+j}\in[k,k+1)\ \ (j=0,1,\cdots,p_k)$ 且 $k>N$ 时, 有

$$\overline{B}_k e^{-k\sigma}\leq B_k^* e^{-k\sigma}\leq\sum_{j=0}^{p_k}\mid b_{n_k+j}\mid e^{-\lambda_{n_k+j}\sigma}<3(p_k+1)\exp(T'U(\frac{1}{\sigma})).$$

即 $\overline{B}_k<3(p_k+1)\exp(T'U(\frac{1}{\sigma})+k\sigma)$, 结合引理 2 得

$$\overline{B}_k\leq 3(p_k+1)\exp[(T')^{\frac{1}{\rho+1}}\cdot\frac{\rho+1}{\rho^{\frac{\rho}{\rho+1}}}\cdot\frac{k}{W(k)}(1+\circ(1))],$$

$$\frac{W(k)\ln^+\overline{B}_k}{k}\leq\frac{W(k)\ln^+3(p_k+1)}{k}+(T')^{\frac{1}{\rho+1}}\cdot\frac{\rho+1}{\rho^{\frac{\rho}{\rho+1}}}(1+\circ(1)),$$

由条件 $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}\ln^+(p_k+1)^{\frac{W(k)}{k}}=0$, 可得

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{W(k)\ln^+\overline{B}_k}{k}\leq\frac{\rho+1}{\rho^{\frac{\rho}{\rho+1}}}(T')^{\frac{1}{\rho+1}}<\frac{\rho+1}{\rho^{\frac{\rho}{\rho+1}}}T^{\frac{1}{\rho+1}}.$$

结合定理 1 知

$$\overline{\lim_{\sigma\to0^+}}\frac{\ln^+\overline{M}_u(\sigma,\omega)}{U(\frac{1}{\sigma})}\leq T'<T,$$

与条件相矛盾, 故假设不成立, 即 $P(E)=0$, 也就是说

$$\overline{\lim_{\sigma\to0^+}}\frac{\ln^+\overline{M}_u(\sigma,\alpha,\beta,\omega)}{U(\frac{1}{\sigma})}=T\ \ \text{a.s.}.$$

定理 3 设有限正级随机 Dirichlet 级数 (1.1) 满足 $\sigma_u(\omega)=0$ a.s., 且 (1.4) 式中 p_k 满足 $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}\ln^+(p_k+1)^{\frac{W(k)}{k}}=0$, 则随机级数 (1.1) a.s. 具有下面的性质: 对任意的实数 t, 有

$$\overline{\lim_{\sigma\to0^+}}\frac{\ln^+\overline{M}(\sigma,\omega)}{U(\frac{1}{\sigma})}=\overline{\lim_{\sigma\to0^+}}\frac{\ln^+\overline{M}(\sigma+it,\omega)}{U(\frac{1}{\sigma})}\ \ \text{a.s.}.$$

证 设上式左边的上极限为 T a.s., 当 $T=0$ 时结论显然成立. 下设 $0<T\le+\infty$, 假设对于任意的 t, $\omega\in E$ 时,

$$\varlimsup_{\sigma\to0^+}\frac{\ln^+\overline{M}(\sigma+it,\omega)}{U(\frac{1}{\sigma})}<T,$$

且有 $P(E)>0$, 取 $0<T_k\uparrow T$, 令

$$E_k=\{\omega\mid\varlimsup_{\sigma\to0^+}\frac{\ln^+\overline{M}(\sigma+it,\omega)}{U(\frac{1}{\sigma})}<T_k\}.$$

于是

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k,\ \ E_1\subset E_2\subset\cdots\cdots,$$

因此 $\exists\lim\limits_{k\to+\infty}P(E_k)=P(E)>0$. 从而 $\exists\,k'$, 使得 $P(E_k)>0$. 记 $T_{k'}=T'$, $E_{k'}=E^{(1)}$, 有

$$E^{(1)}=\{\omega\mid\varlimsup_{\sigma\to0^+}\frac{\ln^+\overline{M}(\sigma+it,\omega)}{U(\frac{1}{\sigma})}<T'\},$$

且有 $P(E^{(1)})>0$, 取 $0<\sigma_j\downarrow0^+$, 令

$$G_j=\{\omega\mid\frac{\ln^+\overline{M}(\sigma+it,\omega)}{U(\frac{1}{\sigma})}<T',\forall\sigma<\sigma_j\}\bigcap E^{(1)},$$
$$H_m=\bigcup_{j=1}^{m}G_j,$$

于是

$$E^{(1)}=\bigcup_{m=1}^{\infty}H_m,$$

从而 $\exists\,m'$, 使得 $P(H_{m'})>0$.

记 $H=H_{m'}$, $\sigma'=\sigma_{m'}$, 那么 $\forall\omega\in H$, $\forall\sigma<\sigma'$, 有

$$\overline{M}(\sigma+it,\omega)<\exp(T'U(\frac{1}{\sigma})).$$

按 P.-Z. 引理中确定的 $N=N(H)$ 及 $e'=e(H)$, 以及引理 3, $\forall\omega\in H_1$ $(H_1\subset H, P(H/H_1)=0)$, 当 σ 为充分小正数时, 有

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty}b_n\varepsilon_n(\omega)e^{-\lambda_n(\sigma+it)}\right|<2\exp(T'U(\frac{1}{\sigma})).$$

$\forall N'>N$, 当 σ 为充分小正数时, 由 P.-Z. 引理得

$$e'\sum_{n=N}^{N'}|b_n|^2e^{-2\lambda_n\sigma}\le\int_E\left|\sum_{n=N}^{N'}b_n\varepsilon_n(\omega)e^{-\lambda_n(\sigma+it)}\right|^2P(d\omega)\ \ (N'>N).$$

又由于

$$|\sum_{n=N}^{N'} b_n\varepsilon_n(\omega)e^{-\lambda_n(\sigma+it)}|\leq\sum_{n=0}^{\infty}|\ b_n\ |\ e^{-\lambda_n\sigma}<+\infty\ \ (\sigma>0),$$

所以当 σ 为充分小的正数时, 有

$$\sum_{n=N}^{+\infty}|\ b_n\ |^2\ e^{-2\lambda_n\sigma}\leq\frac{1}{e'}\int_E|\sum_{n=N}^{+\infty}b_n\varepsilon_n(\omega)e^{-\lambda_n(\sigma+it)}\ |^2\ P(d\omega)<4\exp(2T'U(\frac{1}{\sigma})).$$

这样, 当 σ 为充分小的正数, $n\geq N$ 时, 有 $|\ b_n\ |\ e^{-\lambda_n\sigma}<2\exp(T'U(\frac{1}{\sigma}))$, 因此当 $\lambda_{n_k+j}\in[k,k+1)\ \ (j=0,1,\cdots,p_k)$, 且 $k\geq N$ 时, 有

$$\overline{B}_ke^{-k\sigma}\leq B_k^*e^{-k\sigma}\leq\sum_{j=0}^{p_k}|\ b_{n_k+j}\ |\ e^{-\lambda_{n_k+j}\sigma}<2(p_k+1)\exp(T'U(\frac{1}{\sigma})).$$

即

$$\overline{B}_k<2(p_k+1)\exp(T'U(\frac{1}{\sigma})+k\sigma),$$

结合引理 2 得

$$\overline{B}_k\leq 2(p_k+1)\exp[(T')^{\frac{1}{\rho+1}}\cdot\frac{\rho+1}{\rho^{\frac{\rho}{\rho+1}}}\cdot\frac{k}{W(k)}(1+\circ(1))],$$

$$\frac{W(k)\ln^+\overline{B}_k}{k}\leq\frac{W(k)\ln^+2(p_k+1)}{k}+(T')^{\frac{1}{\rho+1}}\cdot\frac{\rho+1}{\rho^{\frac{\rho}{\rho+1}}}(1+\circ(1)),$$

由条件 $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}\ln^+(p_k+1)^{\frac{W(k)}{k}}=0$, 可得

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{W(k)\ln^+\overline{B}_k}{k}\leq\frac{\rho+1}{\rho^{\frac{\rho}{\rho+1}}}(T')^{\frac{1}{\rho+1}}<\frac{\rho+1}{\rho^{\frac{\rho}{\rho+1}}}T^{\frac{1}{\rho+1}}.$$

结合定理 1 知

$$\overline{\lim_{\sigma\to0^+}}\frac{\ln^+\overline{M}_u(\sigma,\omega)}{U(\frac{1}{\sigma})}\leq T'<T,$$

与题目条件相矛盾, 故假设不成立. 于是有 $P(E)=0$, 也就得到

$$\overline{\lim_{\sigma\to0^+}}\frac{\ln^+\overline{M}_u(\sigma+it,\omega)}{U(\frac{1}{\sigma})}=T\ \ \text{a.s.}.$$

参 考 文 献

[1] 余家荣, 丁晓庆, 田范基. Dirichlet 级数与随机 Dirichlet 级数的值分布 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2004.

[2] 余家荣. Dirichlet 级数及随机 Dirichlet 级数在水平直线上的增长性 [J]. 江西师范大学学报, 1995, 19(3): 189–196.

[3] 余家荣. 随机 Dirichlet 级数的一些性质 [J]. 数学学报, 1978, 21(2): 97–118.

[4] 杨锦华, 孙道椿, 卢维娜. Dirichlet 级数在半平面上的增长性 [J]. 新疆师范大学学报, 2010, 29(1): 39–42.

[5] 岳超, 孙道椿. Dirichlet 级数与随机 Dirichlet 级数在半平面内的增长性 [J]. 华南师范大学学报, 2011, 2: 23–27.

[6] 刘伟群, 孙道椿. 随机 Dirichlet 级数在全平面上的增长性 [J]. 数学杂志, 2010, 26(6): 481–486.

GROWTH OF RANDOM DIRICHLET SERIES IN THE HALF PLANE

WANG Qiong[1], YANG Qi[2], YUAN Wen-jun[2], TIAN Hong-gen[1]

(*1.School of Mathematics Science, Xinjiang Normal University, Urumqi 830054, China*)

(*2.School of Mathematics and Information Sciences, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China*)

Abstract: In this paper, we study the growth of certain finite positive order random Dirichlet series in the right half plane. By the method of Knopp-Kojima, we prove three theorems about the type of two kinds of random Dirichlet series, which extends the research scope of the growth of certain finite order random Dirichlet series in the half plane.

Keywords: random Dirichlet series; type; Knopp-Kojima method

2010 MR Subject Classification: 30B50