Vol. 36 (2016)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

超经典 Boussinesq 系统的守恒律和自相容源

胡贝贝, 张 玲
(滁州学院数学与金融学院, 安徽 滁州 239000)

摘 要: 本文研究了超经典 Boussinesq 系统. 利用已有的超经典 Boussinesq 方程族及其超哈密顿结构, 构造了带自相容源的超经典 Boussinesq 方程族, 并通过引入变量 F 和 G , 获得了超经典 Boussinesq 方程族的守恒律.

关键词: 超经典 Boussinesq 系统; 自相容源; 守恒律
MR(2010) **主题分类号**: 35Q51; 37K10; 17A70; 37K05 **中图分类号**: O175.29
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2016)03-0584-07

1 引言

随着孤子理论的发展, 与 Lie 超代数 $B(0,1)$ 相关的超可积系统及其超 Hamilton 结构的研究引起了很多学者的兴趣, 许多经典的可积方程已被拓展到超完全可积方程 (见文 [1–4] 等). 胡星标教授 [5] 和马文秀教授 [6] 对此方面做出了很大的贡献, 其中, 在 1990 年, 胡 [5] 不加证明的首次提出了超迹恒等式——是构造超可积方程的超哈密顿系统的有效工具; 在 2008 年, 马给出超迹恒等式的证明, 同时应用此超迹恒等式构造许多超可积方程的超双哈密顿结构 (见文 [6, 7] 等).

含自相容源的可积系统研究是寻找新的可积系统过程中发展起来的, 含自相容源的孤子方程在物理上有广泛的应用, 它与流体力学、固体物理学和等离子体物理有关. 一般地, 源导致孤立波以变速行进, 使得孤子的运动特征发生了很大的变化. 从物理上讲, 含自相容源的可积方程描述的是不同孤立波间的相互作用, 如含自相容源的 KdV 方程可以描述等离子体重高频波包和一个低频波包的相互作用, 含自相容源的 KP 方程描述了在 X–Y 平面上传播的长短波之间的相互作用. 因而, 含自相容源的可积方程的研究得到重视 [8–10]. 俄罗斯数学物理学家 Melnikov[11] 在原 Lax 对中增加一个新的算子而得到带源的非线性可积系统. 曾云波等从约束流出发可以得到含自相容源的方程族, 如含自相容源的 KdV 方程族、AKNS 方程族等. 胡星标等提出源生成法, 从方程的行列式解或 Pfaff 解出发, 对原孤子方程的解进行推广, 来构造和求解含自相容源的孤子方程.

近期, 李等 [12–15] 对一些经典可积系统超化, 进一步从约束流出发构造含自相容源的超可积系统并研究其守恒律. 目前, 关于经典的 Boussinesq 谱问题的研究也有不少结果. 如斯仁道尔吉 [16] 研究了经典 Boussinesq 方程族的约束流; 陶 [17] 构造了超经典 Boussinesq 方程族,

*收稿日期: 2014-07-27 接收日期:2014-09-18
基金项目: 安徽省高校省级优秀青年人才基金资助 (2013SQRL092ZD); 安徽省自然科学基金资助 (1408085QA06); 滁州学院科研启动基金资助 (2014qd006; 2014qd009); 滁州学院科研项目 (2014GH12); 安徽省自然科学研究项目 (KJ2015B02).
作者简介: 胡贝贝 (1986–), 男, 安徽安庆, 助教, 主要研究方向: 孤立子与可积系统.
通讯作者: 张玲.

并研究该超方程族的双非线性化问题. 基于前人的工作, 本文旨在已有的超经典 Boussinesq 系统及其超哈密顿结构上, 研究超经典 Boussinesq 方程族的守恒律以及构造带自相容源的超经典 Boussinesq 方程族.

本文结构如下: 在第二部分, 列出了超经典 Boussinesq 系统及其超哈密顿结构已有的结果. 在第三部分, 我们在第二部分基础之上构造带自相容源的超经典 Boussinesq 可积方程族, 并在第四部分中研究超经典 Boussinesq 方程族的守恒律问题.

2 超 Boussinesq 系列及其超哈密顿结构

本节中将已知结果罗列如下: 超 Boussinesq 等谱问题

$$\phi_x = U\phi, \quad U = \begin{pmatrix} -\lambda - \frac{1}{4}q & r & \alpha \\ -1 & \lambda + \frac{1}{4}q & \beta \\ \beta & -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} q \\ r \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

其中 λ 为谱参数, q, r 为偶变量, α, β 为奇变量, 其零曲率方程

$$U_t - V_x^{(n)} + [U, V^{(n)}] = 0, \tag{2.2}$$

其中

$$V^{(n)} = V_+^{(n)} + \Delta_n = \sum_{m=0}^{n} \begin{pmatrix} A_m & B_m & \rho_m \\ C_m & -A_m & \delta_m \\ \delta_m & -\rho_m & 0 \end{pmatrix} \lambda^{n-m} + \begin{pmatrix} -C_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & C_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

此处 $(-\frac{1}{2}A_{j+1}, C_{j+1}, -2\delta_{j+1}, 2\rho_{j+1})^T$ 的递推关系式

$$\begin{cases} (-\frac{1}{2}A_{j+1}, C_{j+1}, -2\delta_{j+1}, 2\rho_{j+1})^T = \mathcal{L}(-\frac{1}{2}A_j, C_j, -2\delta_j, 2\rho_j)^T, \\ A_j = \partial^{-1}(B_j + rC_j + \alpha\delta_j + \beta\rho_j), \end{cases} \tag{2.4}$$

递推算子 $\mathcal{L}$ 有下列形式

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\partial - \frac{1}{4}\partial^{-1}q\partial & -\frac{1}{4}\partial^{-1}r\partial - \frac{1}{4}r & \frac{1}{4}\partial^{-1}\alpha\partial + \frac{1}{8}\alpha & \frac{1}{4}\partial^{-1}\beta\partial - -\frac{1}{8}\beta \\ -2 & \frac{1}{2}\partial - \frac{1}{4}q & \frac{1}{2}\beta & 0 \\ 4\beta & 2\alpha & -\partial + \frac{1}{4}q & 1 \\ 4\alpha + 4\beta & 2r\beta & \alpha\beta - r & -\partial - \frac{1}{4}q \end{pmatrix},$$

可得到超 Boussinesq 系统

$$u_{t_n} = \begin{pmatrix} q \\ r \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_t = J \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}A_n \\ C_n \\ -2\delta_n \\ 2\rho_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4\partial & 0 & 0 \\ 4\partial & 0 & -\alpha & \beta \\ 0 & -\alpha & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \beta & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}A_n \\ C_n \\ -2\delta_n \\ 2\rho_n \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

应用超迹恒等式

$$\frac{\delta}{\delta u}(\mathrm{Str}V\frac{\partial U}{\partial \lambda}) = (\lambda^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial \lambda}\lambda^{\gamma})(\mathrm{Str}V\frac{\partial U}{\partial u}), \tag{2.6}$$

得到超经典 Boussinesq 系统 (2.5) 的超哈密顿结构

$$u_{t_n}=J\mathcal{L}^{n-1}\begin{pmatrix} q\\ r\\ \alpha\\ \beta \end{pmatrix}=J\frac{\delta \tilde{H}_n}{\delta u},\quad \tilde{H}_n=\int\frac{2A_{n+2}}{n+1}dx,\quad n\geq 0. \tag{2.7}$$

由此递推关系式 (2.4), 给定初值 $A_0=-1, B_0=C_0=\rho_0=\delta_0=0$, $A_j, B_j, C_j, \rho_j, \delta_j$ $(j\geq 1)$ 前面几项结果为

$$\begin{aligned}&A_1=0, B_1=r, C_1=-1, \rho_1=\alpha, \delta_1=\beta, A_2=-\frac{1}{2}r+\alpha\beta,\\ &B_2=-\frac{1}{2}r_x-\frac{1}{4}qr, C_2=\frac{1}{4}q, \rho_2=-\frac{1}{4}q\alpha-\alpha_x, \delta_2=-\frac{1}{4}q\beta+\beta_x.\end{aligned}$$

特别地, $n=2$, 方程 (2.5) 约化为超经典 Boussinesq 方程

$$\begin{cases} q_{t_2}=\frac{1}{2}q_{xx}-2r_x+4(\alpha\beta)_x-\frac{1}{2}qq_x-4\beta\beta_{xx},\\ r_{t_2}=-\frac{1}{2}r_{xx}-\frac{1}{2}(qr)_x-2\alpha\alpha_x+2r\beta\beta_x,\\ \alpha_{t_2}=-\alpha_{xx}-\frac{3}{8}q_x\alpha-\frac{1}{2}q\alpha_x-\frac{1}{2}r_x\beta-r\beta_x+\alpha\beta\beta_x,\\ \beta_{t_2}=\beta_{xx}-\frac{1}{8}q_x\beta-\frac{1}{2}q\beta_x-\alpha_x, \end{cases} \tag{2.8}$$

其 Lax 对为 U 和

$$V^{(2)}=\begin{pmatrix} -\lambda^2+\frac{1}{16}q^2-\frac{1}{8}q_x+\beta\beta_x & r\lambda-\frac{1}{2}r_x-\frac{1}{4}qr & \alpha\lambda-\alpha_x-\frac{1}{4}q\alpha\\ -\lambda+\frac{1}{4}q-\frac{1}{16}q^2+\frac{1}{8}q_x-\beta\beta_x & \lambda^2-\frac{1}{16}q^2+\frac{1}{8}q_x-\beta\beta_x & \beta\lambda+\beta_x-\frac{1}{4}q\beta\\ \beta\lambda+\beta_x-\frac{1}{4}q\beta & -\alpha\lambda+\alpha_x+\frac{1}{4}q\alpha & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

3 带自相容源的超经典 Boussinesq 方程族

本节中我们将构造带自相容源的超经典 Boussinesq 系统的可积方程族, 在其超谱问题

$$\begin{aligned}&\phi_x=U\phi,\\ &\phi_t=V\phi\end{aligned} \tag{3.1}$$

中令 $\lambda=\lambda_j$, 相应的谱向量 ϕ 记为 ϕ_j, 则得到 N 个相应线性问题

$$\begin{pmatrix}\phi_{1j}\\ \phi_{2j}\\ \phi_{3j}\end{pmatrix}_x=U_j\begin{pmatrix}\phi_{1j}\\ \phi_{2j}\\ \phi_{3j}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\phi_{1j}\\ \phi_{2j}\\ \phi_{3j}\end{pmatrix}_t=V_j\begin{pmatrix}\phi_{1j}\\ \phi_{2j}\\ \phi_{3j}\end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

其中 $U_j=U|_{\lambda=\lambda_j},\ V_j=V|_{\lambda=\lambda_j},\ j=1,2,\cdots,N$. 由

$$\frac{\delta\tilde{H}_n}{\delta u}=\sum_{j=1}^{N}\frac{\delta\lambda_j}{\delta u}=\sum_{j=1}^{N}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\langle\Phi_1,\Phi_2\rangle\\ \langle\Phi_2,\Phi_2\rangle\\ -2\langle\Phi_2,\Phi_3\rangle\\ 2\langle\Phi_1,\Phi_3\rangle\end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

其中 $\Phi_j=(\phi_{j1},\cdots,\phi_{jN})^T$, $j=1,2,3$. 故带自相容源的超经典 Boussinesq 可积方程族为

$$u_t=\begin{pmatrix} q\\ r\\ \alpha\\ \beta \end{pmatrix}_t=J\begin{pmatrix} A_n\\ C_n\\ -2\delta_n\\ 2\rho_n \end{pmatrix}+J\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\langle\Phi_1,\Phi_2\rangle\\ \langle\Phi_2,\Phi_2\rangle\\ -2\langle\Phi_2,\Phi_3\rangle\\ 2\langle\Phi_1,\Phi_3\rangle \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_{1j,x}&=(-\lambda-\frac{1}{4}q)\phi_{1j}+r\phi_{2j}+\alpha\phi_{3j},\\ \phi_{2j,x}&=-\phi_{1j}+(\lambda+\frac{1}{4}q))\phi_{2j}+\beta\phi_{3j},\\ \phi_{3j,x}&=\beta\phi_{1j}-\alpha\phi_{2j}. \end{aligned}$$

当 $n=2$ 时, 可得带自相容源的超经典 Boussinesq 方程

$$\begin{aligned} q_{t2}&=\frac{1}{2}q_{xx}-2r_x+4(\alpha\beta)_x-\frac{1}{2}qq_x-4\beta\beta_{xx}+4\partial\sum_{j=1}^{N}\phi_{2j}\phi_{2j},\\ r_{t2}&=-\frac{1}{2}r_{xx}-\frac{1}{2}(qr)_x-2\alpha\alpha_x+2r\beta\beta_x-2\partial\sum_{j=1}^{N}\phi_{1j}\phi_{2j}+2\alpha\sum_{j=1}^{N}\phi_{2j}\phi_{3j}+2\beta\sum_{j=1}^{N}\phi_{1j}\phi_{3j},\\ \alpha_{t2}&=-\alpha_{xx}-\frac{3}{8}q_x\alpha-\frac{1}{2}q\alpha_x-\frac{1}{2}r_x\beta-r\beta_x+\alpha\beta\beta_x-\alpha\sum_{j=1}^{N}\phi_{2j}\phi_{2j}-2\sum_{j=1}^{N}\phi_{1j}\phi_{3j},\\ \beta_{t2}&=\beta_{xx}-\frac{1}{8}q_x\beta-\frac{1}{2}q\beta_x-\alpha_x+\beta\sum_{j=1}^{N}\phi_{2j}\phi_{2j}+\sum_{j=1}^{N}\phi_{2j}\phi_{3j}. \end{aligned}$$

4 超 Boussinesq 方程族的守恒律

本节转为构造超 Boussinesq 方程族的守恒律. 首先引入变量

$$F=\frac{\phi_2}{\phi_1},\quad G=\frac{\phi_3}{\phi_1}. \tag{4.1}$$

由谱问题 (3.1), 有

$$F_x=-1+(2\lambda+\frac{1}{2}q)F+\beta G-rF^2-\alpha FG, \tag{4.2}$$

$$G_x=\beta-\alpha F+(\lambda+\frac{1}{4}q)G-\alpha G^2-rGF. \tag{4.3}$$

设 F,G 存在, 且将 F,G 按谱参数 λ 的负幂展开

$$F=\sum_{j=1}^{\infty}f_j\lambda^{-j},G=\sum_{j=1}^{\infty}g_j\lambda^{-j}. \tag{4.4}$$

将展开式 (4.4) 代入方程 (4.2), (4.3) 比较 λ 同次幂的系数, 得

$$
\begin{aligned}
\lambda^0: \quad f_1 &= \frac{1}{2}, g_1=-\beta,\\
\lambda^{-1}: \quad f_2 &= \frac{1}{2}f_{1x}-\frac{1}{4}qf_1-\frac{1}{2}\beta g_1=-\frac{1}{8}q,\\
g_2 &= g_{1x}+\alpha f_1-\frac{1}{4}qg_1=-\beta_x+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}q\beta,\\
\lambda^{-2}: \quad f_3 &= \frac{1}{2}f_{2x}-\frac{1}{4}qf_2-\frac{1}{2}\beta g_2+\frac{1}{2}rf_1^2-\frac{1}{2}\alpha f_1g_1\\
&= -\frac{1}{16}q_x+\frac{1}{32}q^2+\frac{1}{2}\beta\beta_x-\frac{1}{4}\beta\alpha-\frac{1}{8}\beta^2q+\frac{1}{8}r-\frac{1}{4}\alpha\beta\\
&= -\frac{1}{16}q_x+\frac{1}{32}q^2+\frac{1}{2}\beta\beta_x+\frac{1}{8}r,\\
g_3 &= g_{2x}+\alpha f_2-\frac{1}{4}qg_2+\alpha g_1^2+rf_1g_1\\
&= -\beta_{xx}+\frac{1}{2}\alpha_x+\frac{1}{4}q_x\beta+\frac{1}{4}q\beta_x-\frac{1}{8}\alpha q+\frac{1}{4}q\beta_x-\frac{1}{8}q\alpha-\frac{1}{16}q^2\beta+\alpha\beta^2-\frac{1}{2}r\beta\\
&= -\beta_{xx}+\frac{1}{2}\alpha_x+\frac{1}{4}q_x\beta+\frac{1}{2}q\beta_x-\frac{1}{16}q^2\beta-\frac{1}{2}r\beta.
\end{aligned}
$$

从而有 f_n 和 g_n 的递推公式

$$
f_{n+1}=\frac{1}{2}f_{nx}-\frac{1}{4}qf_n-\frac{1}{2}\beta g_n+\frac{1}{2}r\sum_{l=1}^{n}f_lf_{n-l}-\frac{1}{2}\alpha\sum_{l=1}^{n}f_lg_{n-l},
$$

$$
g_{n+1}=g_{nx}+\alpha g_n-\frac{1}{4}qg_n+\alpha\sum_{l=1}^{n}g_lg_{n-l}+r\sum_{l=1}^{n}f_lg_{n-l}.
$$

由线性谱问题 (3.1) 知

$$
\begin{aligned}
&(\ln\phi_1)_x=(-\lambda-\frac{1}{4}q)+rF+\alpha G,\\
&(\ln\phi_1)_t=A+BF+\rho G.
\end{aligned}
$$

所以有

$$
\frac{\partial}{\partial t}((-\lambda-\frac{1}{4}q)+rF+\alpha G)=\frac{\partial}{\partial x}(A+BF+\rho G).
$$

若令 $a=(-\lambda-\frac{1}{4}q)+rF+\alpha G$, $\theta=A+BF+\rho G$. 则方程化为 $a_t=\theta_x$. 对于超经典 Boussinesq 方程 (2.8), 容易计算出

$$
\begin{aligned}
&A=-\lambda^2-\frac{1}{2}r+\alpha\beta,\quad B=r\lambda-\frac{1}{2}r_x-\frac{1}{4}qr,\quad C=-\lambda+\frac{1}{4}q,\\
&\rho=\alpha\lambda-\alpha x-\frac{1}{4}q\alpha, \delta=\beta\lambda+\beta_x-\frac{1}{4}q\beta.
\end{aligned}
$$

将 F,G 的展开式 (4.4) 与超经典 Boussinesq 方程族 (2.8) 所对应的 A,B,ρ 代入可见

$$
a=-\lambda-\frac{1}{4}q+\sum_{j=1}^{\infty}a_j\lambda^{-j},
$$

$$
\theta=-\lambda^2-\frac{1}{2}r+\alpha\beta+\frac{1}{2}r-\alpha\beta+\sum_{j=1}^{\infty}\theta_j\lambda^{-j}=-\lambda^2+\sum_{j=1}^{\infty}\theta_j\lambda^{-j}.
$$

令 λ 的同次幂相等, 即知超经典 Boussinesq 方程 (2.8) 具有无穷多守恒律, 其中 a_j, θ_j 分别称为守恒密度和连带流. 第一对守恒密度和流为

$$\begin{aligned} a_1 &= rf_1 + \alpha g_1 = \frac{1}{2}r - \alpha\beta, \\ \theta_1 &= rf_2 - (\frac{1}{2}r_x + \frac{1}{4}qr)f_1 + \alpha g_2 - (\alpha_x + \frac{1}{4}qr)g_1 \\ &= -\frac{1}{8}rq - \frac{1}{4}r_x - \frac{1}{8}qr - \alpha\beta_x + \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{4}\alpha q\beta + \frac{1}{4}q\alpha\beta + \alpha_x\beta \\ &= -\frac{1}{4}rq - \frac{1}{4}r_x - \alpha\beta_x + \frac{1}{2}q\alpha\beta + \alpha_x\beta. \end{aligned}$$

一般的守恒密度和流的表达式为

$$\begin{aligned} &a_n = rf_n + \alpha g_n, \\ &\theta_n = rf_{n+1} - (\frac{1}{2}r_x + \frac{1}{4}qr)f_n + \alpha g_{n+1} - (\frac{1}{4}q\alpha + \alpha_x)g_n. \end{aligned}$$

参 考 文 献

[1] Li Y S, Zhang L N. Super AKNS scheme and its infinite conserved currents[J]. Nuovo. Cimento. A., 1986, 93 (2): 175–183.

[2] Tao S X, Xia T C. Two super-integrable hierarchies and their super-Hamiltonian structures[J]. Commun. Nonl. Sci. Numer. Simul., 2011, 16: 127–132.

[3] Tao S X, Xia T C. Lie algebra and lie super algebra for integrable couplings of C-KdV hierarchy[J]. Chin. Phys. Lett., 2010, 27: 040202.

[4] Tao S X, Xia T C. The super-classical-Boussinesq hierarchy and its super Hamiltonian structure[J]. Chin. Phys. B., 2010, 19: 070202.

[5] Hu X B. An approach to generate superextensions of integrable systems[J]. Phys. A., 1997, 30(2): 619–632.

[6] Ma W X, He J S, Qin Z Y. A supertrace identity and its applications to super integrable systems[J]. Math. Phys., 2008, 49(3): 033511.

[7] Ma W X. Variational identities and Hamiltonian structures[J]. Nonl. Modern Math. Phys., 2010: 1–27.

[8] Hu X B, Wang H. Construction of dKP and BKP equations with selfconsistent sources[J]. Inverse Prob., 2006, 22: 1903–1920.

[9] Zeng Y, Ma W X. Integration of the soliton hierarchy with self consistent sources[J]. Math. Phys., 2000, 41: 5453–5489.

[10] Zhang D. The N-soliton solutions of the MKdV equation with selfconsistent sources[J]. Phys. Soc. Jpn., 2002, 71: 2649–2656.

[11] Melnikov. On equations for wave intersections[J]. Lett. Math. Phys., 1983, 7: 129–136.

[12] Li L. Conservation laws and self-consistent sources for a super-CKdV equation hierarchy[J]. Phys. Lett. A., 2011, 375: 1402–1406.

[13] Wang H, Xia T C. Conservation laws for a super G-J hierarchy with self-consistent sources[J]. Commun. Nonl. Sci. Numer. Simul., 2012, 17: 566–572.

[14] Wang Y, Chen Y. Conservation laws and self-consistent sources for a super integrable equation hierarchy[J]. Commun. Nonl. Sci. Numer. Simul., 2012, 17: 2292–2298.

[15] Tao S X. Self-consistent sources and conservation laws for super coupled Burgers equation hierarchy[J]. Intern. J. Appl. Phys. Math., 2013, 3: 252–256.

[16] Sirendaoerji, Li Y S. Different Hamiltonian for the constrained flows of the classical Boussinesq hierarcy[J]. J. Inner Mongolia Norm. Univ. (Natur. Sci. Ed.), 2000, 29(1): 1–7.

[17] Tao S X, Wang H, Shi H. Binary nonlinearization of the super-classical-Boussinesq hierarchy[J]. Chin. Phys. B., 2011, 7: 070201.

CONSERVATION LAWS AND SELF-CONSISTENT SOURCES FOR THE SUPER CLASSICAL BOUSSINESQ SYSTEM

HU Bei-bei, ZHANG Ling

(*School of Mathematics and Finance, Chuzhou University, Chuzhou 239000, China*)

Abstract: In this paper we study super classical Boussinesq system. By using the family super classical Boussinesq equation, its super Hamiltonian structures have been constructed, with self-consistent sources family super classical Boussinesq equation. By introducing the variables F and G, we obtain the conservation laws of super classical Boussinesq hierarchy of equations.

Keywords: super classical Boussinesq system; conservation laws; self-consistent sources

2010 MR Subject Classification: 35Q51; 37K10; 17A70; 37K05