Vol. 36 (2016)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

β 级星像函数类和凸像函数类的扩展问题

傅秀莲
(广东工贸职业技术学院计算机系, 广东 广州 510510)

摘 要: 本文利用文 [2, 3] 的引理和算子 $L(a,c)f(z)$ 的一些性质. 结合 Hadamard 乘积, 研究了算子 $L(a,c)f(z)$, 获得了 $L(a,c)f(z)\in S^*(\beta)$ 和 $L(a,c)f(z)\in K(\beta)$ 的充分条件, 推广了文 [2, 3] 的相关结论.

关键词: Hadamard 乘积; β 级星像函数类; β 级凸像函数类
MR(2010) 主题分类号: 30C45　　中图分类号: O174.51
文献标识码: A　　文章编号: 0255-7797(2016)04-0787-07

1 引言

用 A 来表示在单位圆 $U=\{z\in C:|z|<1\}$ 内解析, 且具有如下形式的泰勒展开式

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n \tag{1.1}$$

的函数 f 构成的函数族. S 表示 A 中的单叶函数子族. 用 $S^*(\beta)$, $K(\beta)$ 分别表示为 $\mathrm{Re}\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\}>\beta$ 和 $\mathrm{Re}\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\}>\beta$ 函数类, 其中 $0\le\beta<1$. 它们都是 S 的子类, 分别称为 β 级星像函数类和 β 级凸像函数类. 特别地, 记 $S^*(0)\equiv S^*$, $K(0)\equiv K$. 注意到 $f(z)\in K(\beta)\Longleftrightarrow zf'(z)\in S^*(\beta)$.

函数 $f(z)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_kz^k$ 和 $g(z)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}b_kz^k$ 的 Hadamard 乘积或卷积 $(f*g)(z)$ 定义为

$$(f*g)(z)=\sum_{k=1}^{+\infty}a_kb_kz^k.$$

设函数 $\phi(a,c;z)$ 定义为

$$\phi(a,c;z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n}z^{n+1}\ \ (c\neq 0,-1,-2,\cdots,z\in U),$$

其中 $(x)_n$ 定义为

$$(x)_n:=\begin{cases}x(x+1)\cdots(x+n-1), & n\in\mathbf{N}=\{1,2,\cdots\},\\ 1, & n=0.\end{cases}$$

*收稿日期: 2015-01-24　　接收日期: 2015-03-17
作者简介: 傅秀莲 (1979–), 女, 广东广州, 副教授, 主要研究方向: 复分析及其应用.

Carlson 和 Shaer [1] 利用了 Hadamard 乘积定义了线性算子 $L(a,c)$, 定义如下:

$$L(a,c)f(z) := \phi(a,c;z) * f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} a_n z^{n+1} \ \ (c \neq 0, -1, -2, \cdots, z \in U). \tag{1.2}$$

注意到 $L(a,a)f(z) = f(z)$, $L(2,1)f(z) = zf'(z)$.

由式子 (1.2), 容易验证

$$z(L(a,c)f(z))' = aL(a+1,c)f(z) - (a-1)L(a,c)f(z). \tag{1.3}$$

许多作者对 S^*, $S^*(\beta)$ 和 $K(\beta)$ 函数类的充分条件进行了讨论, 得到了很多好的结论, 具体可以见文 [2–6]. 本文结合 Hadamard 乘积, 利用文 [2, 3] 的引理, 对算子 $L(a,c)f(z)$ 进行讨论, 得到 $L(a,c)f(z) \in S^*(\beta)$ 和 $L(a,c)f(z) \in K(\beta)$ 的充分条件, 推广了文 [2, 3] 的结论.

为了定理的证明, 先介绍三个相关的引理.

引理 1.1 [2] 若 $f(z) \in A$ 且满足 $|f'(z) - 1| < \frac{2}{\sqrt{5}}$ $(z \in U)$, 则 $f(z) \in S^*$.

引理 1.2 [2] 若 $f(z) \in A$ 且满足 $|\arg f'(z)| < \frac{\pi}{2}\delta$ $(z \in U)$, 则 $f(z) \in S^*$, 其中 $\delta = 0.6165\cdots$ 是方程 $2\tan^{-1}(1-\delta) + (1-2\delta)\pi = 0$ 的唯一解.

引理 1.3 [3] 若 $f(z) \in A$ 且满足 $|f''(z)| < \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.4472\cdots$ $(z \in U)$, 则 $f(z) \in K$.

2 主要结论

应用引理 1.1, 可以得到定理 2.1.

定理 2.1 若 $f(z) \in A$ 且满足

$$\left| \left(\frac{L(a,c)f(z)}{z} \right)^{\frac{1}{1-\beta}} \left(\frac{aL(a+1,c)f(z)}{L(a,c)f(z)} - (a-1) - \beta \right) - 1 + \beta \right| < \frac{2}{\sqrt{5}}(1-\beta) \ \ (z \in U),$$

其中 $0 \le \beta < 1$, 则 $L(a,c)f(z) \in S^*(\beta)$.

证 设 $f(z) \in A$, 定义 $p(z)$ 如下:

$$p(z) = \left(\frac{L(a,c)f(z)}{z^{\beta}} \right)^{\frac{1}{1-\beta}} = z + \frac{a}{c} \cdot \frac{a_2}{1-\beta} z^2 + \cdots, \tag{2.1}$$

则 $p(z) \in A$, 且

$$p'(z) = \frac{1}{1-\beta} \left(\frac{L(a,c)f(z)}{z} \right)^{\frac{1}{1-\beta}} \times \left(\frac{z(L(a,c)f(z))'}{L(a,c)f(z)} - \beta \right).$$

结合式子 (1.3) 可以得到

$$p'(z) = \frac{1}{1-\beta} \left(\frac{L(a,c)f(z)}{z} \right)^{\frac{1}{1-\beta}} \times \left(\frac{aL(a+1,c)f(z)}{L(a,c)f(z)} - (a-1) - \beta \right). \tag{2.2}$$

由定理的条件可得

$$|p'(z) - 1| = \frac{1}{1-\beta} \left| \left(\frac{L(a,c)f(z)}{z} \right)^{\frac{1}{1-\beta}} \times \left(\frac{aL(a+1,c)f(z)}{L(a,c)f(z)} - (a-1) - \beta \right) - 1 + \beta \right| < \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

应用引理 1.1, 可以得到 $p(z) \in S^*$.

注意到

$$\frac{zp'(z)}{p(z)} = \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{z(L(a,c)f(z))'}{L(a,c)f(z)} - \beta\right),$$

所以

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z(L(a,c)f(z))'}{L(a,c)f(z)}\right) > \beta \ (z \in U),$$

这意味着 $L(a,c)f(z) \in S^*(\beta)$.

在定理 2.1 中, 令 $\beta = \frac{1}{2}$, 可得

推论 2.1 若 $f(z) \in A$ 且满足

$$\left|\left(\frac{L(a,c)f(z)}{z}\right)^2\left(\frac{aL(a+1,c)f(z)}{L(a,c)f(z)} - a + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.4472\cdots \quad (z \in U),$$

则 $L(a,c)f(z) \in S^*(\frac{1}{2})$.

在定理 2.1 中, 令 $\beta = 0$, 可得

推论 2.2 若 $f(z) \in A$ 且满足

$$\left|\frac{aL(a+1,c)f(z)}{z} - \frac{(a-1)L(a,c)f(z)}{z} - 1\right| < \frac{2}{\sqrt{5}} \ \ (z \in U),$$

则 $L(a,c)f(z) \in S^*$.

在推论 2.2 中, 令 $a = 1, c = 1$, 可得

推论 2.3 若 $f(z) \in A$ 且满足

$$\left|\frac{L(2,1)f(z)}{z} - 1\right| < \frac{2}{\sqrt{5}} \ \ (z \in U),$$

则 $f(z) \in S^*$.

注 2.1 在推论 2.3 中应用 $L(2,1)f(z) = zf'(z)$, 可以得到引理 1.1.

注 2.2 在定理 2.1 中令 $a = 1, c = 1$, 可得文 [3] 中的定理 2.1 .

应用引理 1.2, 可以得到定理 2.2.

定理 2.2 若 $f(z) \in A$ 且满足

$$\left|\arg\left(\frac{L(a,c)f(z)}{z}\right) + (1-\beta)\arg\left(\frac{aL(a+1,c)f(z)}{L(a,c)f(z)} - (a-1) - \beta\right)\right| < \frac{\pi}{2}\delta(1-\beta) \ \ (z \in U),$$

其中 $0 \le \beta < 1$, 则 $L(a,c)f(z) \in S^*(\beta)$, 其中 $\delta = 0.6165\cdots$ 是方程 $2\tan^{-1}(1-\delta)+(1-2\delta)\pi = 0$ 的唯一解.

证 设 $p(z)$ 由式子 (2.1) 给出, 则从式子 (2.2) 可得

$$\begin{aligned} |\arg p'(z)| &= \left|\frac{1}{1-\beta}\arg\left(\frac{L(a,c)f(z)}{z}\right) + \arg\left(\frac{aL(a+1,c)f(z)}{L(a,c)f(z)} - (a-1) - \beta\right)\right| \\ &= \frac{1}{1-\beta}\left|\arg\left(\frac{L(a,c)f(z)}{z}\right) + (1-\beta)\arg\left(\frac{aL(a+1,c)f(z)}{L(a,c)f(z)} - (a-1) - \beta\right)\right|. \end{aligned}$$

由引理 1.2 可以得到, 若满足式子

$$\frac{1}{1-\beta}\left|\arg\left(\frac{L(a,c)f(z)}{z}\right)+(1-\beta)\arg\left(\frac{aL(a+1,c)f(z)}{L(a,c)f(z)}-(a-1)-\beta\right)\right|<\frac{\pi}{2}\delta\ \ (z\in U),$$

则 $p(z)\in S^*$. 这意味着 $L(a,c)f(z)\in S^*(\beta)$. 证毕.

在定理 2.2 中令 $\beta=\frac{1}{2}$, 可以得到推论 2.4.

推论 2.4 若 $f(z)\in A$ 且满足

$$\left|\arg\left(\frac{L(a,c)f(z)}{z}\right)+\frac{1}{2}\arg\left(\frac{aL(a+1,c)f(z)}{L(a,c)f(z)}-a+\frac{1}{2}\right)\right|<\frac{\pi}{4}\delta\ \ (z\in U),$$

则 $L(a,c)f(z)\in S^*(\frac{1}{2})$, 其中 $\delta=0.6165\cdots$ 是方程 $2\tan^{-1}(1-\delta)+(1-2\delta)\pi=0$ 的唯一解.

在定理 2.2 中令 $\beta=0$, 可以得到推论 2.5.

推论 2.5 若 $f(z)\in A$ 且满足

$$\left|\arg\left(\frac{L(a,c)f(z)}{z}\right)+\arg\left(\frac{aL(a+1,c)f(z)}{L(a,c)f(z)}-(a-1)\right)\right|<\frac{\pi}{2}\delta\ \ (z\in U),$$

则 $L(a,c)f(z)\in S^*$, 其中 $\delta=0.6165\cdots$ 是方程 $2\tan^{-1}(1-\delta)+(1-2\delta)\pi=0$ 的唯一解.

在推论 2.5 中令 $a=1,c=1$ 可得推论 2.6.

推论 2.6 若 $f(z)\in A$ 且满足

$$\left|\arg\left(\frac{L(1,1)f(z)}{z}\right)+\arg\left(\frac{L(2,1)f(z)}{L(1,1)f(z)}\right)\right|<\frac{\pi}{2}\delta\ \ (z\in U),$$

则 $L(a,c)f(z)\in S^*$, 其中 $\delta=0.6165\cdots$ 是方程 $2\tan^{-1}(1-\delta)+(1-2\delta)\pi=0$ 的唯一解.

注 2.3 在推论 2.6 中应用 $L(1,1)f(z)=f(z)$, $L(2,1)f(z)=zf'(z)$, 可以得到引理 1.2.

注 2.4 在定理 2.3 中令 $a=1$, $c=1$ 可以得到文 [3] 的定理 2.3.

定理 2.3 若 $f(z)\in A$ 且满足

$$\begin{aligned}&\Bigg|\left(\frac{[\,aL(a+1,c)f(z)-(a-1)L(a,c)f(z)\,]^{\beta}}{z}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\Big(a(a+1)L(a+2,c)f(z)\\&\quad+a(1-\beta-2a)L(a+1,c)f(z)-(a-1)(1-\beta-a)L(a,c)f(z))\Big)-1+\beta\Bigg|\\&<\ \frac{2}{\sqrt{5}}(1-\beta)\ \ (z\in U),\end{aligned}$$

其中 $0\le\beta<1$, 则 $L(a,c)f(z)\in K(\beta)$.

证 设 $f(z)\in A$, 定义 $p(z)$ 如下:

$$p(z)=\int_0^z\left((L(a,c)f(t))'\right)^{\frac{1}{1-\beta}}dt=z+\frac{a}{c}\cdot\frac{a_2}{1-\beta}z^2+\cdots.\tag{2.3}$$

令

$$g(z)=zp'(z)=z\Big(\big(L(a,c)f(z)\big)'\Big)^{\frac{1}{1-\beta}}=z+\frac{a}{c}\cdot\frac{2a_2}{1-\beta}z^2+\cdots,$$

则 $p(z)\in A$, $g(z)\in A$, 且

$$\begin{aligned} g'(z) &= \Big(\big(L(a,c)f(z)\big)'\Big)^{\frac{\beta}{1-\beta}}\Big(\big(L(a,c)f(z)\big)'+\frac{1}{1-\beta}z\big(L(a,c)f(z)\big)''\Big) \\ &= \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{\big(z\big(L(a,c)f(z)\big)'\big)^{\frac{\beta}{1-\beta}}}{z^{\frac{1}{1-\beta}}}\right)\Big((1-\beta)z\big(L(a,c)f(z)\big)'+z^2\big(L(a,c)f(z)\big)''\Big). \end{aligned}$$

由式子 (1.3) 可以得到

$$z^2(L(a,c)f(z))''=az(L(a+1,c)f(z))'-az(L(a,c)f(z))' \tag{2.4}$$

和

$$z(L(a+1,c)f(z))'=(a+1)L(a+2,c)f(z)-aL(a+1,c)f(z). \tag{2.5}$$

结合式子 (1.3), (2.4) 和 (2.5) 可得

$$\begin{aligned} g'(z) &= \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{[\,aL(a+1,c)f(z)-(a-1)L(a,c)f(z)\,]^{\beta}}{z}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\Big(a(a+1)L(a+2,c)f(z) \\ &\quad +a(1-\beta-2a)L(a+1,c)f(z)-(a-1)(1-\beta-a)L(a,c)f(z))\Big). \end{aligned} \tag{2.6}$$

因此由定理的条件可以得到

$$\begin{aligned} |g'(z)-1| &= \frac{1}{1-\beta}\Bigg|\left(\frac{[\,aL(a+1,c)f(z)-(a-1)L(a,c)f(z)\,]^{\beta}}{z}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \\ &\quad \Big(a(a+1)L(a+2,c)f(z)+a(1-\beta-2a)L(a+1,c)f(z) \\ &\quad -(a-1)(1-\beta-a)L(a,c)f(z))\Big)-1+\beta\Bigg|<\frac{2}{\sqrt{5}}, \end{aligned}$$

所以 $g(z)=zp'(z)\in S^*$, 这等价于 $p(z)\in K$.

注意到

$$\frac{zp''(z)}{p'(z)}=\frac{1}{1-\beta}\frac{z(L(a,c)f(z))''}{(L(a,c)f(z))'},$$

可得

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zp''(z)}{p'(z)}\right)=\mathrm{Re}\left(1+\frac{1}{1-\beta}\frac{z(L(a,c)f(z))''}{(L(a,c)f(z))'}\right)>0\ \ (z\in U),$$

所以 $L(a,c)f(z)\in K(\beta)$. 证毕.

在定理 2.3 中令 $\beta=0$, 可以得到推论 2.7.

推论 2.7 若 $f(z)\in A$ 且满足

$$\left|\frac{a(a+1)L(a+2,c)f(z)+a(1-2a)L(a+1,c)f(z)+(a-1)^2L(a,c)f(z)}{z}-1\right|<\frac{2}{\sqrt{5}}\,(z\in U),$$

则 $L(a,c)f(z)\in K$.

在推论 2.7 中取 $a=1,c=1$, 可得推论 2.8.

推论 2.8 若 $f(z)\in A$ 且满足

$$\left|\frac{2L(3,1)f(z)-L(2,1)f(z)}{z}-1\right|<\frac{2}{\sqrt{5}}\ \ (z\in U),$$

则 $L(a,c)f(z)\in K$.

注 2.5 在定理 2.3 中取 $a=1,c=1$, 可得到文 [3] 中的定理 3.1 .

定理 2.4 若 $f(z)\in A$ 且满足

$$\left|\arg\left(\frac{[\,aL(a+1,c)f(z)-(a-1)L(a,c)f(z)\,]^{\beta}}{z}\right)+(1-\beta)\arg\Big(a(a+1)L(a+2,c)f(z)\right.$$
$$\left.+a(1-\beta-2a)L(a+1,c)f(z)-(a-1)(1-\beta-a)L(a,c)f(z)\Big)\right|<\frac{\pi}{2}\delta(1-\beta)\ (z\in U),$$

其中 $0\le\beta<1$, 则 $L(a,c)f(z)\in K(\beta)$, 其中 $\delta=0.6165\cdots$ 是方程 $2\tan^{-1}(1-\delta)+(1-2\delta)\pi=0$ 的唯一解.

证 设 $p(z)$ 由式子 (2.3) 给出, 并且设 $g(z)=zp'(z)$, 则由式子 (2.6) 可得

$$g'(z)=\frac{1}{1-\beta}\left(\frac{[\,aL(a+1,c)f(z)-(a-1)L(a,c)f(z)\,]^{\beta}}{z}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\Big(a(a+1)L(a+2,c)f(z)$$
$$+a(1-\beta-2a)L(a+1,c)f(z)-(a-1)(1-\beta-a)L(a,c)f(z)\Big).$$

应用引理 1.2, 可以得到

$$\begin{aligned}|\arg g'(z)| &= \left|\frac{1}{1-\beta}\arg\left(\frac{[\,aL(a+1,c)f(z)-(a-1)L(a,c)f(z)\,]^{\beta}}{z}\right)\right.\\ &\quad+\arg\Big(a(a+1)L(a+2,c)f(z)+a(1-\beta-2a)L(a+1,c)f(z)\\ &\quad\left.-(a-1)(1-\beta-a)L(a,c)f(z)\Big)\right|<\frac{\pi}{2}\delta,\end{aligned}$$

其中 $z\in U$, 所以 $g(z)\in S^*$, 这等价于 $p(z)\in K$, 即 $L(a,c)f(z)\in K(\beta)$.

注 2.6 在定理 2.4 中取 $a=1,\ c=1$, 可以得到文 [3] 中的定理 3.3.

定理 2.5 若 $f(z)\in A$ 且满足

$$\left|\frac{aL(a,c)f(z)}{z^2}\left(\frac{L(a+1,c)f(z)}{L(a,c)f(z)}-1\right)\right|<\frac{1}{\sqrt{5}}=0.4472\cdots(z\in U),$$

则 $L(a,c)f(z)\in S^*$.

证 设 $f(z)\in A$, 定义

$$g(z)=\int_0^z\frac{L(a,c)f(t)}{t}dt=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(a)_{n-1}}{(c)_{n-1}}\frac{a_n}{n}z^n,$$

则经过计算可得

$$g''(z)=\frac{L(a,c)f(z)}{z^2}\left(\frac{z(L(a,c)f(z))'}{L(a,c)f(z)}-1\right).$$

结合式子 (1.3) 可得

$$|g''(z)|=\left|\frac{aL(a,c)f(z)}{z^2}\left(\frac{L(a+1,c)f(z)}{L(a,c)f(z)}-1\right)\right|<\frac{1}{\sqrt{5}}=0.4472\cdots(z\in U).$$

应用引理 1.3 可得 $g(z)\in K$.

注意到

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>0\ \ (z\in U),$$

所以 $L(a,c)f(z)\in S^*$.

注 2.7 在定理 2.5 中取 $a=1$, $c=1$ 可以得到文 [3] 中的定理 4.1.

参 考 文 献

[1] Carlson B C, Shaer D B. Starlike and prestarlike hypergeometric functions[J]. Siamj. Math. Anal., 1984, 15: 737–745.

[2] Mocanu P T. Some starlikeness conditions for analytic functions[J]. Rev. Roumaine Math. Pur. Appl., 1988, 33: 117–124.

[3] Uyanık N, Aydogan M, Owa S. Extensions of sufficient conditions for starlikeness and convexity of order β[J]. Appl. Math. Lett., 2011, 24: 1393–1399.

[4] Liu M S. On the starlikeness for certain subclass of analytic functions and a problem of ruscheweyh[J]. Adv. Math., 2005, 34(4): 416–424.

[5] 刘名生. Bazilevic 函数类的子类的性质 [J]. 数学杂志, 2001, 21(1): 33–37.

[6] Mocanu P T. Some simple criteria for starlikeness and convexity[J]. Libertas Math., 1993, 13: 27–40.

SUFFICIENT CONDITIONS FOR CLASSES OF β RANK EXPANDED STARLIKENESS AND CONVEXITY FUNCTIONS

FU Xiu-lian

(*Department of Computer Sciences, Guangdong College of Industry and Commerce, Guangzhou 510510, China*)

Abstract: In this article, we study the operator $L(a,c)f(z)$ combining Hadamard products. Using lemmas in [2, 3] and some qualities of operator $L(a,c)f(z)$, we obtain sufficient conditions for $L(a,c)f(z)\in S^*(\beta)$ and $L(a,c)f(z)\in K(\beta)$, which generalizes the related results in [2, 3].

Keywords: Hadamard product; starlike of order β; convex of order β

2010 MR Subject Classification: 30C45