Vol. 36 (2016)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

随机环境中马氏链函数的强大数定律

宋明珠, 吴永锋
(铜陵学院数学与计算机学院, 安徽 铜陵 244000)

摘 要: 本文研究了随机环境中马氏链函数的强极限定理, 得到了随机环境中马氏链函数强大数定律成立的两个充分条件, 拓宽了已有定理的适用范围.

关 键 词: 随机环境; 马氏链; 强大数定律
MR(2010) **主题分类号**: 60F05; 60J10 **中 图 分 类 号**: O211.62
文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2016)06-1245-08

1 引言与引理

20 世纪 80 年代初 Cogburn 等人开始研究随机环境中马氏链的一般理论, 取得一系列深刻而丰富的成果 [1–3]. Orey [4] 在 Cogburn 等人研究的基础对随机环境中马氏链进行了深入地研究, 并提出一系列的问题, 引起众多概率论学者的关注. 目前有关随机环境中马氏链的强大数定律方面的研究文献比较多, 如李应求 [8] 研究了马氏环境中马氏链的强极限定理, 同时在文献 [9] 中研究了具有离散参数量的马氏环境中马氏链函数的强大数定律. 然而随机环境中马氏链函数的强大数定律研究却很少, 鉴于此, 本文通过对一类马氏链函数强大数定理的研究, 推进这方面的研究. 本文研究了随机环境中马氏链函数的强极限定理, 得到了随机环境中马氏链函数强大数定律成立的两个充分条件, 已有的文献是在马氏环境中给出了马氏链函数的强大数定律, 本文仅在随机环境的条件下得到了类似的结论, 从而拓宽了已有定理的适用范围.

本文沿用文 [1–4] 中的符号和术语, 设 N 表示整数集, N_+ 表示非负整数集, $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 是一概率空间, $(X,\mathcal{A})$ 和 $(\Theta,\mathcal{B})$ 均为任意的可测空间, $\overrightarrow{\xi}=\{\xi_n:n\in N_+\}$ 和 $\overrightarrow{X}=\{X_n:n\in N_+\}$ 分别是 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上取值于 Θ 和 X 的随机序列, $\{P(\theta):\theta\in\Theta\}$ 是 $(X,\mathcal{A})$ 上的一族转移函数, 且对任意的 $A\in\mathcal{A}$, $P(\cdot;\cdot,A)$ 是关于 $\mathcal{B}\times\mathcal{A}$ 可测的, $\{K_n(.,.)\}$ 是 $(\Theta,\mathcal{B})$ 上的一步转移概率函数族, 且假定任意的 $B\in\mathcal{B},K_n(.,B)$ 是关于 $\mathcal{B}$ 可测的. 对任意序列 $\overrightarrow{\eta}=\{\eta_n,n\in N_+\}$, 记 $\overrightarrow{\eta_k^r}=\{\eta_n,k\le n\le r\}$.

定义 1 [5] 如果对任意的 A$\in\mathcal{A}$, $n\in N_+$, 有

$$P(X_0\in A\mid\overrightarrow{\xi_0^\infty})=P(X_0\in A\mid\xi_0),$$
$$P(X_{n+1}\in A\mid\ \overrightarrow{X_0^n},\overrightarrow{\xi_0^\infty})=P(\xi_n;X_n,A),$$

则称 $\overrightarrow{X}$ 是随机环境 $\overrightarrow{\xi}$ 中的马氏链.

*收稿日期: 2014-02-28 接收日期: 2014-12-17
基金项目:高校省级自然科学研究项目 (kj2013z331); 省自然科学基金项目 (1308085MA03).
作者简介: 宋明珠 (1979–), 女, 安徽无为, 讲师, 主要研究方向: 随机环境中的马氏链.

引理 1 [5] $\overrightarrow{X}$ 是随机环境 $\overrightarrow{\xi}$ 中的马氏链, $\{f_n(.)\}_{n\geq 0}$ 是 $(X,\mathcal{A})$ 上的有界可测函数列, 令 $\mathcal{F}_n=\sigma(\overrightarrow{X}_0^n,\overrightarrow{\xi}_0^n)$, 则 $\mathbf{E}[f_n(X_n)|\mathcal{F}_{n-1}]=\mathbf{E}[f_n(X_n)|X_{n-1},\xi_{n-1}]$ a.s..

引理 2 [6] (克罗内克引理) 设 $\{x_n\}$ 是实数的一个序列, $\{\alpha_n,n>0\}$ 是 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\infty$ 的一个正数列, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{\alpha_n}<\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha_n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=0$.

引理 3 [6] 对任意的事件 $\{E_n,n\in N_+\}$, 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}P(E_n)<\infty$, 则 $P(E_n\ \text{ i.o.})=0$.

2 主要结果及证明

定理 1 设 $\overrightarrow{X}$ 是随机环境 $\overrightarrow{\xi}$ 中的马氏链, $\{f_n(X_n)\}_{n\geq 0}$ 是 $(X,\mathcal{A})$ 上的可测函数列, 且 $0<a_n\uparrow\infty$, 若

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}\frac{|f_n(X_n)|^\beta}{a_n|f_n(X_n)|^{\beta-1}+a_n^\beta}<\infty\ (1\leq\beta\leq 2), \tag{2.1}$$

则 $\forall k\geq 1$ 有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(X_n)-\mathbf{E}(f_n(X_n)|X_{n-k},\xi_{n-k})}{a_n}<\infty\quad \text{a.s.},$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{m=0}^{n}(f_m(X_m)-\mathbf{E}(f_m(X_m)|X_{m-k},\xi_{m-k}))=0\quad \text{a.s.},$$

这里约定 $\forall k\geq 1,\ \ X_{-k}=0,\ \ \xi_{-k}=0$.

证 $k=1$ 的情况. 因为 $1\leq\beta\leq 2$, 所以当 $|f_n(X_n)|>a_n>0$ 时, 有

$$\frac{2|f_n(X_n)|^\beta}{a_n|f_n(X_n)|^{\beta-1}+a_n^\beta}>\frac{2|f_n(X_n)|^\beta}{2|f_n(X_n)|^\beta}=1,$$

由 (2.1) 式可知

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}P(|f_n(X_n)|>a_n)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}I_{\{|f_n(X_n)|>a_n\}}\\ \leq\ &\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}\frac{2|f_n(X_n)|^\beta}{a_n|f_n(X_n)|^{\beta-1}+a_n^\beta}I_{\{|f_n(X_n)|>a_n\}}\\ \leq\ &\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}\frac{2|f_n(X_n)|^\beta}{a_n|f_n(X_n)|^{\beta-1}+a_n^\beta}<\infty.\end{aligned}$$

由引理 3 可知 $P(|f_n(X_n)|>a_n\ \text{ i.o.})=0$, 即 $P(\frac{|f_n(X_n)|}{a_n}>1\ \text{ i.o.})=0$, 所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(X_n)}{a_n}I_{\{|f_n(X_n)|>a_n\}}<\infty\quad \text{a.s.}, \tag{2.2}$$

由 (2.1) 式知

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{E}\sum_{n=0}^{\infty}|\mathbf{E}\frac{f_n(X_n)}{a_n}I_{\{|f_n(X_n)|>a_n\}}|(X_{n-1},\xi_{n-1})| \\
\le & \mathbf{E}\sum_{n=0}^{\infty}|\mathbf{E}\frac{|f_n(X_n)|}{a_n}I_{\{|f_n(X_n)|>a_n\}}|(X_{n-1},\xi_{n-1})| \\
\le & \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}(\frac{|f_n(X_n)|}{a_n}\frac{2|f_n(X_n)|^{\beta-1}}{a_n^{\beta-1}+|f_n(X_n)|^{\beta-1}}I_{\{|f_n(X_n)|>a_n\}}|(X_{n-1},\xi_{n-1})) \\
\le & 2\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}\frac{|f_n(X_n)|^{\beta}}{a_n|f_n(X_n)|^{\beta-1}+a_n^{\beta}}<\infty,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}(\frac{f_n(X_n)}{a_n}I_{\{|f_n(X_n)|>a_n\}}|(X_{n-1},\xi_{n-1}))<\infty \quad \text{a.s..} \tag{2.3}
$$

记

$$
Y_n=\frac{f_n(X_n)}{a_n}I_{\{|f_n(X_n)|\le a_n\}}-\mathbf{E}(\frac{f_n(X_n)}{a_n}I_{\{|f_n(X_n)|\le a_n\}}|(X_{n-1},\xi_{n-1})),
$$

因为 $\frac{f_n(X_n)}{a_n}I_{\{|f_n(X_n)|\le a_n\}}\le 1$, 所以由引理 1 可知 $\{Y_n,n\ge 0\}$ 是关于 σ 代数族 $\{\mathcal{F}_n,n\ge 0\}$ 的鞅差序列. 由鞅差序列正交性知, 对任意 $i\ne j$ 有 $\mathbf{E}Y_iY_j=0$, 对 $1\le\beta\le 2$ 有

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{E}|\sum_{m=0}^{n}Y_m|^2=\sum_{m=0}^{n}\mathbf{E}Y_m^2 \\
\le & 4\sum_{m=0}^{n}\mathbf{E}\frac{|f_m(X_m)|^2}{a_m^2}I_{\{|f_m(X_m)|\le a_m\}} \\
\le & 4\sum_{m=0}^{n}\mathbf{E}\frac{|f_m(X_m)|^{\beta}}{a_m^{\beta}}I_{\{|f_m(X_m)|\le a_m\}} \\
\le & 4\sum_{m=0}^{n}\mathbf{E}\frac{2|f_m(X_m)|^{\beta}}{a_m^{\beta}+a_m|f_m(X_m)|^{\beta-1}}I_{\{|f_m(X_m)|\le a_m\}},
\end{aligned}
$$

由 (2.1) 式可知 $\sup\limits_{n\ge 0}\mathbf{E}|\sum\limits_{m=0}^{n}Y_m|^2<\infty$, 所以 $\sum\limits_{m=0}^{n}Y_m$ 是 L^2 收敛的, 而 L^2 收敛的鞅是 a.s. 收敛的, 即

$$
\sum_{n=0}^{\infty}Y_n<\infty \quad \text{a.s.,} \tag{2.4}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(X_n)-\mathbf{E}(f_n(X_n)|(X_{n-1},\xi_{n-1}))}{a_n} \\
= & \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{f_n(X_n)}{a_n}I_{\{|f_n(X_n)|>a_n\}})+\sum_{n=0}^{\infty}Y_n-\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}\frac{f_n(X_n)}{a_n}I_{\{|f_n(X_n)|>a_n\}})|(X_{n-1},\xi_{n-1})),
\end{aligned}
$$

由 (2.2)、(2.3) 和 (2.4) 式可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(X_n)-\mathbf{E}(f_n(X_n)|(X_{n-1},\xi_{n-1}))}{a_n}<\infty \quad \text{a.s..} \tag{2.5}$$

下面考虑 $k>1$ 的情形. 由 $\{X_n, n\geq 0\}$ 的马氏性知, 对于任意的 $m=1,2,\cdots,k-1$, $\{X_{nk+m}, n\geq 0\}$ 也是马氏链, 由 (2.1) 式显然有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}\frac{|f_{nk+m}(X_{nk+m})|^{\beta}}{a_{nk+m}|f_{nk+m}(X_{nk+m})|^{\beta-1}+a_{nk+m}^{\beta}}<\infty.$$

由 (2.5) 式知, 对任意的 $m=1,2,\cdots,k-1$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_{nk+m}(X_{nk+m})-\mathbf{E}(f_{nk+m}(X_{nk+m})|(X_{(n-1)k+m},\xi_{(n-1)k+m}))}{a_{nk+m}}<\infty \quad \text{a.s..} \tag{2.6}$$

从而由 (2.6) 式知

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(X_n)-\mathbf{E}(f_n(X_n)|(X_{n-k},\xi_{n-k}))}{a_n}\\
=\ &\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{k-1}\frac{f_{nk+m}(X_{nk+m})-\mathbf{E}(f_{nk+m}(X_{nk+m})|(X_{(n-1)k+m},\xi_{(n-1)k+m}))}{a_{nk+m}}\\
=\ &\sum_{m=1}^{k-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_{nk+m}(X_{nk+m})-\mathbf{E}(f_{nk+m}(X_{nk+m})|(X_{(n-1)k+m},\xi_{(n-1)k+m}))}{a_{nk+m}}\\
<\ &\infty \quad \text{a.s..}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

由引理 2 和 (2.7) 式知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{m=1}^{n}(f_m(X_m)-\mathbf{E}(f_m(X_m)|X_{m-k},\xi_{m-k}))=0 \quad \text{a.s..}$$

即定理 1 得证.

注 定理 1 与文献 [7] 中的引理 4 都给出了随机环境中马氏链函数强大数定律成立的充分条件, 但是两个定理应用的前提条件不一样.

定理 2 $\overrightarrow{X}$ 是随机环境 $\overrightarrow{\xi}$ 中的马氏链, $\{f_n(X_n)\}_{n\geq 0}$ 是 $(X,\mathcal{A})$ 上的可测函数列, 且 $0<a_n\uparrow\infty$, 若存在 $0\leq\alpha\leq 2, \beta>0$ 使得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}[|f_n(X_n)|^{\alpha}e^{\beta|f_n(X_n)|}|\mathcal{F}_{k-1}]=\varphi(\alpha,\beta)<\infty,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}(f_k(X_k)-\mathbf{E}(f_k(X_k)|\mathcal{F}_{k-1}))=0 \quad \text{a.s..}$$

证 对任意非零的实数 λ, 令

$$M_0(\lambda)=1, M_n(\lambda)=\frac{e^{\lambda\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(X_k)}}{\prod\limits_{k=1}^{n}\mathbf{E}[e^{\lambda f_k(X_k)}|\mathcal{F}_{k-1}]}, n\geq 1.$$

易证 $E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n)=M_n$, 所以 $\{M_n(\lambda),\mathcal{F}_n,n\geq 1\}$ 是非负实值鞅, 由鞅收敛定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}M_n(\lambda)<\infty\quad$ a.s., 因此当 $0<a_n\uparrow\infty$, 有 $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\ln M_n(\lambda)\leq 0\quad$ a.s., 即

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\{\lambda\sum_{k=1}^{n}f_k(X_k)-\sum_{k=1}^{n}\ln\mathbf{E}[e^{\lambda f_k(X_k)}|\mathcal{F}_{k-1}]\}\leq 0\quad \text{a.s..}\tag{2.8}$$

当 $\lambda>0$ 时, 将 (2.8) 式两边同除以 λ 可得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\{\sum_{k=1}^{n}f_k(X_k)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda}\ln\mathbf{E}[e^{\lambda f_k(X_k)}|\mathcal{F}_{k-1}]\}\leq 0\quad \text{a.s..}\tag{2.9}$$

当 $\lambda<0$ 时, 将 (2.8) 式两边同除以 λ 可得

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\{\sum_{k=1}^{n}f_k(X_k)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda}\ln\mathbf{E}[e^{\lambda f_k(X_k)}|\mathcal{F}_{k-1}]\}\geq 0\quad \text{a.s..}\tag{2.10}$$

首先证明 $0\leq\alpha\leq 1$ 的情况. 当 $0<\lambda<\beta$, 因为

$$\ln x\leq x-1(x>0),\quad e^x-1-x\leq |x|^2e^{|x|}$$

和

$$\sup\{x^pe^{-mx},x>0\}\leq(\frac{p}{me})^p(p\geq 1,m>0),$$

故由 (2.9) 式得

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}[f_k(X_k)-\mathbf{E}(f_k(X_k)|\mathcal{F}_{k-1})]\\
\leq\ &\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{\lambda}\ln\mathbf{E}(e^{\lambda f_k(X_k)}|\mathcal{F}_{k-1})-\mathbf{E}(f_k(X_k)|\mathcal{F}_{k-1})]\\
\leq\ &\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda a_n}\sum_{k=1}^{n}[\mathbf{E}(e^{\lambda f_k(X_k)}|\mathcal{F}_{k-1})-1-\lambda\mathbf{E}(f_k(X_k)|\mathcal{F}_{k-1})]\\
\leq\ &\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda a_n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(|\lambda f_k(X_k)|^2e^{|\lambda f_k(X_k)|}|\mathcal{F}_{k-1})\\
=\ &\limsup_{n\to\infty}\frac{\lambda}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(|f_n(X_n)|^{\alpha}e^{\beta|f_n(X_n)|}|f_n(X_n)|^{2-\alpha}e^{(\lambda-\beta)|f_n(X_n)|}|\mathcal{F}_{k-1})\\
\leq\ &\lambda[\frac{2-\alpha}{(\beta-\lambda)e}]^{2-\alpha}\varphi(\alpha,\beta)\quad \text{a.s..}
\end{aligned}\tag{2.11}$$

令 $\lambda \downarrow 0$, 由 (2.11) 式可得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}[f_k(X_k)-\mathbf{E}(f_k(X_k)|\mathcal{F}_{k-1})]\le 0 \quad \text{a.s..} \tag{2.12}$$

当 $\beta<\lambda<0$, 由 (2.10) 式和类似 (2.11) 式计算可得

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}[f_k(X_k)-\mathbf{E}(f_k(X_k)|\mathcal{F}_{k-1})]\\
\ge\ &\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{\lambda}\ln\mathbf{E}(e^{\lambda f_k(X_k)}|\mathcal{F}_{k-1})-\mathbf{E}(f_k(X_k)|\mathcal{F}_{k-1})]\\
\ge\ &\lambda[\frac{2-\alpha}{(\beta-\lambda)e}]^{2-\alpha}\varphi(\alpha,\beta)\quad \text{a.s..}
\end{aligned}$$

令 $\lambda \uparrow 0$, 由上式可得

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}[f_k(X_k)-\mathbf{E}(f_k(X_k)|\mathcal{F}_{k-1})]\ge 0 \quad \text{a.s..} \tag{2.13}$$

联立 (2.12)、(2.13) 式可得, 当 $0\le\alpha\le 1$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}(f_k(X_k)-\mathbf{E}(f_k(X_k)|\mathcal{F}_{k-1}))=0 \quad \text{a.s..}$$

再证明 $1<\alpha\le 2$ 的情况.

当 $0<\lambda<\beta$, 因为 $\ln x\le x-1(x>0)$, $e^x-1-x\le|x|^\alpha e^{|x|}(1<\alpha\le 2)$, 类似 (2.11) 式得

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}[f_k(X_k)-\mathbf{E}(f_k(X_k)|\mathcal{F}_{k-1})]\\
\le\ &\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda a_n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(|\lambda f_k(X_k)|^\alpha e^{|\lambda f_k(X_k)|}|\mathcal{F}_{k-1})\\
=\ &\limsup_{n\to\infty}\frac{\lambda^{\alpha-1}}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(|f_n(X_n)|^\alpha e^{\beta|f_n(X_n)|}e^{(\lambda-\beta)|f_n(X_n)|}|\mathcal{F}_{k-1})\\
\le\ &\lambda^{\alpha-1}\varphi(\alpha,\beta)\quad \text{a.s..}
\end{aligned}$$

令 $\lambda \downarrow 0$, 则

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}[f_k(X_k)-\mathbf{E}(f_k(X_k)|\mathcal{F}_{k-1})]\le 0 \quad \text{a.s..} \tag{2.14}$$

当 $\beta<\lambda<0$, 类似可得

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}[f_k(X_k)-\mathbf{E}(f_k(X_k)|\mathcal{F}_{k-1})]\ge 0 \quad \text{a.s..} \tag{2.15}$$

联立 (2.14), (2.15) 式得, 当 $1 < \alpha \le 2$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} (f_k(X_k) - \mathbf{E}(f_k(X_k)|\mathcal{F}_{k-1})) = 0 \quad \text{a.s.}.$$

综上所述, 定理 2 得证.

推论 1 $\overrightarrow{X}$ 是随机环境 $\overrightarrow{\xi}$ 中的马氏链, $\{f_n(X_n)\}_{n\ge 0}$ 是 $(X, \mathcal{A})$ 上的有界可测函数列, 且 $0 < a_n \uparrow \infty$, 若存在 $1 < \alpha \le 2$ 使得 $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}[|f_n(X_n)|^\alpha | \mathcal{F}_{k-1}] < \infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} (f_k(X_k) - \mathbf{E}(f_k(X_k)|(X_{n-1}, \xi_{n-1})) = 0 \quad \text{a.s.}.$$

证 因为 $\{f_n(X_n)\}_{n\ge 0}$ 是有界可测函数列, 则存在正数 M, 使对任意的 $n \ge 0$, 有 $|\{f_n(X_n)\}| \le M$. 当 $0 < \lambda < 1$ 时, 因为 $1 < \alpha \le 2$, 则由定理 2 的证明过程可得

$$\begin{aligned} & \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} [f_k(X_k) - \mathbf{E}(f_k(X_k)|\mathcal{F}_{k-1})] \\ \le & \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda a_n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(|\lambda f_k(X_k)|^\alpha e^{|\lambda f_k(X_k)|} | \mathcal{F}_{k-1}) \\ \le & \limsup_{n\to\infty} \frac{M\lambda^{\alpha-1}}{a_n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(|f_n(X_n)|^\alpha | \mathcal{F}_{k-1}), \end{aligned}$$

令 $\lambda \downarrow 0$, 由 $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{E}[|f_n(X_n)|^\alpha] < \infty$, 得

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} [f_k(X_k) - \mathbf{E}(f_k(X_k)|\mathcal{F}_{k-1})] \le 0 \quad \text{a.s.}. \tag{2.16}$$

当 $\lambda < 0$ 时, 同时可得

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} [f_k(X_k) - \mathbf{E}(f_k(X_k)|\mathcal{F}_{k-1})] \ge 0 \quad \text{a.s.}. \tag{2.17}$$

联立 (2.16)、(2.17) 式得, 当 $1 < \alpha \le 2$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} (f_k(X_k) - \mathbf{E}(f_k(X_k)|\mathcal{F}_{k-1})) = 0 \quad \text{a.s.}.$$

因为 $\{f_n(X_n)\}_{n\ge 0}$ 是有界可测函数列, 由引理 1 可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} (f_k(X_k) - \mathbf{E}(f_k(X_k)|(X_{n-1}, \xi_{n-1})) = 0 \quad \text{a.s.}.$$

综上所述, 推论 1 得证.

参 考 文 献

[1] Cogburn R. Markov chains in random environments: the case of Markovian environment[J]. SANN. Prob., 1980, 8(3): 908–916.

[2] Cogburn R. The ergodic theory of Markov Chains in random environments[J]. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1984, 66(2): 109–128.

[3] Cogburn R. On the central limit theorm for Markov Chains in random environments[J]. Ann. Prob., 1991, 19(2): 587–604.

[4] Orey S. Markov chains with stochastically transtion probabilities[J]. Ann. Prob., 1991, 19(3): 907–928.

[5] 吴艳蕾等. 随机环境中马氏链的强大数定律 [J]. 应用概率统计, 2011, 27(6): 579–586.

[6] 刘文, 吴让泉等译. 概率论教程 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1989.

[7] 郭明乐. 双无限环境中马氏链的强大数定律 [J]. 应用数学, 2005, 18(1): 174–180.

[8] 李应求, 王苏明, 胡杨利. 马氏环境中马氏链的一类强极限定理 [J]. 数学进展, 2008, 37(5): 539–550.

[9] 李应求. 状态可数的马氏环境中马氏链函数的强大数定律 [J]. 数学杂志, 2003, 23(4): 484–490.

A STRONG LAW OF LARGE NUMBERS FOR FUNCTION OF MARKOV CHAINS IN RANDOM ENVIRONMENTS

SONG Ming-zhu, WU Yong-feng

(*Department of Mathematics and Computing, Tongling University, Tongling 244000, China*)

Abstract: In this paper, strong limit theorem for function of Markov chains in random environments are investigated. Moreover two sufficients for the strong law of large numbers for function of Markov chains in random environments are obtained. Some laws we abtained broaden the using area of some results already have.

Keywords: random environments; Markov chains; a strong law of large numbers

2010 MR Subject Classification: 60F05; 60J10