Vol. 37 (2017)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

直线上子集的 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑及其应用

龙伦海, 梁 莉, 单家俊
(海南大学信息学院, 海南 海口 570228)

摘 要: 本文利用 s - 维 Hausdorff 测度给出了直线上一个子集 E 上的 $\mathcal{H}^s$ 拓扑和 $\mathcal{H}^s$ - 连通度的定义. 讨论了它们的性质及其应用, 解决了紧的 s - 集在欧氏拓扑下往往不连通的问题.

关键词: 分形; Hausdorff 测度; $\mathcal{H}^s$ - 拓扑; $\mathcal{H}^s$ - 连通度
MR(2010) **主题分类号**: 28A80; 54F65 **中图分类号**: O174.12; O189.11
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2017)02-0401-08

1 简介

本文在第二节给出了与后面内容相关的一些基本拓扑知识 [1]; 第三节针对于实数集中的一个子集 E, 利用其 s - 维 Hausdorff 测度 [2,3] 给出了 E 上的一种新拓扑的定义, 称之为 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑; 第四节研究了 E 上 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑的性质, 并提出了 $\mathcal{H}^s$ - 连通度的概念; 第五节作为应用给出了两个分形集 E 和 F 在分别赋予 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑和 $\mathcal{H}^t$ - 拓扑之后, 它们之间一个映射为连续映射所满足的条件, 本文的主要目的是在该种拓扑下, 为进一步研究分形之间映射的微积分建立理论基础 [4−7].

2 相关拓扑知识

设 X 是一个非空集合, $\mathcal{T}$ 是 X 的子集作为元素构成的集合系, 二元空间 $(X,\mathcal{T})$ 称为是一个拓扑空间当且仅当 $\mathcal{T}$ 包含空集 $\emptyset$ 和 X, 且对任意并和有限交保持封闭性, $\mathcal{T}$ 称为 X 上的一个拓扑, $\mathcal{T}$ 中的元称为开集. 如实数集 $\mathbb{R}$ 上的欧氏距离产生的所有开集构成的 $\mathcal{T}$ 就是 $\mathbb{R}$ 的一个拓扑, 称为欧氏拓扑. 如果 X 上的两个拓扑 $\mathcal{S},\mathcal{T}$ 满足 $\mathcal{S}\subset\mathcal{T}$, 则称 $\mathcal{S}$ 粗于 $\mathcal{T}$ 或者 $\mathcal{T}$ 比 $\mathcal{S}$ 更细, 显然最粗的拓扑是 $\{\emptyset,X\}$, 而最细的拓扑是 X 的所有子集构成的集合系.

设 $(X,\mathcal{T})$ 是一拓扑空间, Y 是 X 的非空子集, 令 $\mathcal{T}_Y=\{Y\cap G\ \mid G\in\mathcal{T}\}$, 则称 $(Y,\mathcal{T}_Y)$ 是 $(X,\mathcal{T})$ 的拓扑子空间. 若 R 是 X 上的等价关系, 其等价类构成的集合 X/R 上的集合系 $\mathcal{T}_R=\{V\ \mid \pi^{-1}(V)\in\mathcal{T}\}$ 形成一个拓扑, 其中 π 是从 X 到 X/R 的自然映射, 称 $(X/R,\mathcal{T}_R)$ 是 $(X,\mathcal{T})$ 的一个商拓扑空间.

设 $(X,\mathcal{T})$ 是一拓扑空间, 若 X 不能分解为两个非空开集的不交并, 则称 $(X,\mathcal{T})$ 是连通的; 若 X 的任意开覆盖都存在有限的子覆盖, 则称 $(X,\mathcal{T})$ 是紧的. 对 $x\in X$ 和 $V\in\mathcal{T}$ 满足 $x\in V$, 则称 V 是 x 的一个开邻域, 若 X 中的任意两个不同点存在不交的开邻域, 则称 X 是 Hausdorff 分离空间.

---

*收稿日期: 2014-08-05 接收日期: 2015-03-19
基金项目: 海南省自然科学基金资助 (113003); 国家自然科学基金资助 (11461016).
作者简介: 龙伦海 (1965–), 男, 重庆大足, 教授, 主要研究方向: 分形几何, 非标准分析.

设 f 是从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的一个映射, $x \in X$ 满足 $f(x)$ 的任意开邻域 V, 都存在 x 的一个开邻域 U 有 $f(U) \subset V$, 则称 f 在点 x 处连续; 若 f 在 X 的每个点都连续, 则称 f 是连续映射. 连续映射一定将连通集映射成连通集, 将紧集映射成紧集.

3 $\mathcal{H}^s$ - 聚点的定义及性质

设 E 是实数集 $\mathbb{R}$ 中的一个子集, 取 $\mathcal{T}$ 是实数集 $\mathbb{R}$ 上的欧氏拓扑, $\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{T}$ 在 E 上诱导的子拓扑, 使 $(E, \mathcal{S})$ 成为 $(\mathbb{R}, T)$ 的拓扑子空间. 当 E 是一个 Hausdorff 维数严格小于 1 的分形时, $(E, \mathcal{S})$ 往往是完全不连通的 Hausdorff 分离空间, 即 $\mathcal{T}$ 中没有任何一个非空开集属于 $\mathcal{S}$. 为此对任意 $s \geq 0$, 将给出 E 上的一类比 S 更粗的拓扑 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑的定义, 记为 $\mathcal{H}_s$, 使得 $(E, \mathcal{H}_s)$ 成为连通的拓扑空间. 首先给出 E 的 $\mathcal{H}^s$ - 聚点的定义.

定义 3.1 设 $\delta > 0, x \in \mathbb{R}$, 记 $B_\delta(x) = ((x-\delta, x) \cap E) \cup ((x, x+\delta) \cap E)$ 为点 x 在 $(E, \mathcal{S})$ 中的去心 δ - 邻域. 任取 $s \geq 0$, 如果对任意 $\delta > 0$, 有 s - 维 Hausdorff 测度 $\mathcal{H}^s(B_\delta(x))$ 严格大于零. 则称 x 为 E 的一个 $\mathcal{H}^s$ - 聚点, 否则称 x 为 E 的一个 $\mathcal{H}^s$ - 孤立点. E 的所有 $\mathcal{H}^s$ - 聚点组成的集合用 $J^s(E)$ 表示.

注意 E 的一个 $\mathcal{H}^s$ - 聚点可能属于 E, 也可能不属于 E, 如对所有 $0 \leq s \leq 1$ 开区间 $(0,1)$ 的 $\mathcal{H}^s$ - 聚点集为闭区间 $[0,1]$. 从该定义可以看出 E 的一个 $\mathcal{H}^s$ - 聚点在其任意的去心左邻域 $(x-\delta, x) \cap E$ 或者其去心右邻域 $(x-\delta, x) \cap E$ 内分布有正的 s - 维 Hausdorff 测度. 并且 $\mathcal{H}^s$ - 聚点具有下述性质.

命题 3.2 设 $E \subseteq \mathbb{R}$, s_0 是 E 的 Hausdorff 维数.

(1) 当 $s = 0$ 时, $\mathbb{R}$ 中一个点 x_0 是 E 的 $\mathcal{H}^0$ - 聚点当且仅当对任意 $\delta > 0$, x_0 的去心 δ - 邻域 $B_\delta(x_0)$ 为无限集, 因而当 E 是有界集时, $J^0(E) = \emptyset$ 的充分必要条件是 E 为有限集.

(2) 当 $s > s_0$ 时, E 无任何 $\mathcal{H}^s$ - 聚点, 即 $J^s(E) = \emptyset$.

(3) 当 $0 \leq s_1 \leq s_2$ 时, 有 $J^{s_1}(E) \supseteq J^{s_2}(E)$, 即 $J^s(E)$ 随 s 的增大而单减.

(4) 当 $E_1 \subseteq E_2$ 时, 对任意 $s \geq 0$ 有 $J^s(E_1) \subseteq J^s(E_2)$.

(5) 当 $s > 0$ 时, $J^s(E) = \emptyset$ 的充分必要条件是 E 的 s - 维 Hausdorff 测度 $\mathcal{H}^s(E) = 0$.

证 由 $\mathcal{H}^s$ - 聚点的定义和以下 s - 维 Hausdorff 测度的性质 (a), (b), (c) 和 (d) 可分别证明命题中的 (1), (2), (3) 和 (4).

对 E 中的任意子集 A, (a) A 的 0 - 维 Hausdorff 测度 $\mathcal{H}^0(A)$ 指的是 A 所包含的点的个数; (b) 当 $s > s_0$ 时, 由 Hausdorff 维数 $\dim_{\mathcal{H}} A \leq \dim_{\mathcal{H}} E = s_0$ 可得 A 的 s - 维 Hausdorff 测度 $\mathcal{H}^s(A) = 0$; (c) A 的 s - 维 Hausdorff 测度 $\mathcal{H}^s(A)$ 随 s 的增大而非增; (d) 当 $E_1 \subseteq E_2$ 时, 对任意 $s \geq 0$, 有 $\mathcal{H}^s(E_1) \leq \mathcal{H}^s(E_2)$.

对于性质 (5), 只需证明必要性. 当 $s > 0$ 时, 若 $J^s(E) = \emptyset$, 由定义 3.1 可得对任意有理数 $x \in \mathbb{Q}$, 存在 $\delta > 0$ 使得 s - 维 Hausdorff 测度 $\mathcal{H}^s((x-\delta, x+\delta) \cap E) = 0$, 从而有 $\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s(\bigcup\limits_{x \in \mathbb{Q}}((x-\delta, x+\delta) \cap E)) \leq \sum\limits_{x \in \mathbb{Q}} \mathcal{H}^s((x-\delta, x+\delta) \cap E) = 0$. 证毕.

例 1 (1) 若 E 是 $\mathbb{R}$ 中的一个有限子集, 则对任意 $s \geq 0$, E 中都没有 $\mathcal{H}^s$ - 聚点, 即 $J^s(E) = \emptyset$; (2) 若 E 是 $\mathbb{R}$ 中的某一个区间的可数稠密子集, 记 $\overline{E}$ 为 E 在拓扑空间 $(\mathbb{R}, T)$ 中的闭包, 则 $J^0(E) = \overline{E}, J^s(E) = \emptyset (s > 0)$; (3) 若 E 是闭区间 $[0,1]$ 上的 Cantor 三分集, 则当 $0 \leq s \leq \frac{\ln 2}{\ln 3}$ 时有 $J^s(E) = E$, 而当 $s > \frac{\ln 2}{\ln 3}$ 时 $J^s(E) = \emptyset$.

对于更一般的分形集 E 的 $\mathcal{H}^s$ - 聚点集 $J^s(E)$, 将通过下述命题来加以描述.

命题 3.3 设 E 是由迭代函数系 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 生成的分形不变集, 且对每个 $i=1,\cdots,n$, f_i 的 Lipschitz 常数 c_i 满足 $0<c_i<1$. 令 s_0 是 E 的 Hausdorff 维数. 有 E 的 $\mathcal{H}^s$ - 聚点集为

$$J^s(E)=\begin{cases} E, & 0\le s<s_0,\\ \emptyset, & s_0<s<\infty.\end{cases}$$

证 当 $s>s_0$, E 的任意子集的 s - 维 Hausdorff 测度都等于零, 因而 E 没有 $\mathcal{H}^s$ - 聚点. 下面只需证明当 $0\le s<s_0$ 时有 $E=J^s(E)$ 成立. 当 $0\le s<s_0$ 时, 一方面由 Hausdorff 维数的定义知 E 的 s - 维 Hausdorff 测度 $\mathcal{H}^s(E)$ 是正无穷大, 从而 E 的各级基块的 s - 维 Hausdorff 测度也是正无穷大.

另一方面, 任取 $x\in E$ 和对任意的 $\delta>0$, 都一定存在充分大的 N, 使得 x 在 (E,S) 中的去心 δ - 邻域 $B_\delta(x)$ 至少包含 E 的一个 N 级基块, 因而 s - 维 Hausdorff 测度 $\mathcal{H}^s(B_\delta(x))$ 严格大于零, 所以 x 是 E 的一个 $\mathcal{H}^s$ - 聚点. 证毕

4 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑的定义及性质

设 E 是 $\mathbb{R}$ 中的一个子集, 对任意 $s\ge 0$, 现在 E 中定义如下点之间的等价关系 R_s.

定义 4.1 称 E 中的两点 x_1,x_2 具有关系 R_s 当且仅当 E 中介于 x_1 和 x_2 之间的所有点形成的集合没有 $\mathcal{H}^s$ - 聚点, 即 $J^s([x_1,x_2]\cap E)=\emptyset$ (不妨假设 $x_1\le x_2$).

现用 $x_1R_sx_2$ 表示 x_1 和 x_2 之间具有关系 R_s. 由该定义及命题 3.2 中 (1) 和 (2), 可直接得到 E 中的任意两点 x_1,x_2 之间是否具有关系 R_s 的如下判别方法.

命题 4.2 任取 $x_1,x_2\in E$, 不妨设 $x_1\le x_2$.

(1) $x_1R_0x_2$ 的充分必要条件是交集 $[x_1,x_2]\cap E$ 为有限集.

(2) 对任意 $s>0$, $x_1R_sx_2$ 的充分必要条件是交集 $[x_1,x_2]\cap E$ 的 s - 维 Hausdorff 测度 $\mathcal{H}^s([x_1,x_2]\cap E)=0$.

设 $E\subseteq\mathbb{R}$, 对任意 $s\ge 0$, 由定义 4.1 和命题 4.2 容易验证 R_s 为 E 中点之间的一个等价关系. 任取 $x\in E$, 令 x^* 为 x 在关系 R_s 下的等价类. 由命题 4.2 可得如下命题 4.3.

命题 4.3 任取 $E\subseteq\mathbb{R}$ 和 $x\in E$. 当 $s=0$ 时, 在等价关系 R_0 下 x 的等价类 x^*, 可表示成所有这些交集 $[x_1,x_2]\cap E$ 的并, 其中 $x_1,x_2\in E$ 满足 $x_1\le x\le x_2$ 且交集 $[x_1,x_2]\cap E$ 为有限集. 而当 $s>0$ 时, 在等价关系 R_s 下 x 的等价类 x^*, 可表示成所有这些交集 $[x_1,x_2]\cap E$ 的并, 其中 $x_1,x_2\in E$ 满足 $x_1\le x\le x_2$ 且 s - 维 Hausdorff 测度 $\mathcal{H}^s([x_1,x_2]\cap E)=0$.

该命题表明 E 中任意一点 x 在等价关系 R_s 下的等价类 x^* 可表示成一个包含 x 的区间 $I(x)$ 与 E 的交. 事实上, $I(x)$ 是包含 x^* 的最小区间, 我们称 $I(x)$ 为 E 中的点 x 所属的 R_s - 等价区间. 注意到 $I(x)$ 在 E 和 $s\ge 0$ 确定的情况下由 x 唯一确定, 可能是开区间, 也可能是闭区间, 还可能是半开半闭区间, 同时可能是单点区间, 有界区间或无界区间, 并且 E 的所有不同的 R_s - 等价区间系 $\{I(x)\}$ 形成 E 的两两不交的覆盖.

记 E/R_s 为 E 中的所有点在关系 R_s 下的等价类作为元素形成的集合, $(E/R_s,\mathcal{S}_{R_s})$ 为 $(E,\mathcal{S})$ 在等价关系 R_s 下的商拓扑空间. 为清楚起见, 现通过下面一些例子来说明 E/R_s 和 $\mathcal{S}_{R_s}$ 的构成情况.

例 2 (1) 当 E 是 $\mathbb{R}$ 中的一个有限子集时, 对任意 $s\ge 0$, 有

$$E/R_s=\{E\},\ \ \mathcal{S}_{R_s}=\{\emptyset,\{E\}\}.$$

(2) 当 E 是 $\mathbb{R}$ 中的一个可数子集时, 由于对所有 $s>0$, E 中任意两点都在关系 R_s 等价, 因此有
$$E/R_s=\{E\},\ \mathcal{S}_{R_s}=\{\emptyset,\{E\}\}.$$
但当 $s=0$ 时情况比较复杂, 如当 E 是自然数集 $\mathbb{N}$ 时, 有
$$E/R_0=\{E\},\ \mathcal{S}_{R_0}=\{\emptyset,\{E\}\}.$$

当 E 是有理数集 $\mathbb{Q}$ 时, 有
$$E/R_0=\{\{x\}\quad|\ x\in E\},\ \mathcal{S}_{R_0}=\{\{\{x\}\quad|\ x\in U\}\quad|\ \forall U\in S\}.$$

当 $E=\{\frac{1}{n}\quad|\ \forall n\in\mathbb{N}\}$ 时, 有
$$E/R_0=\{E\},\ \mathcal{S}_{R_0}=\{\emptyset,\{E\}\}.$$

当 $E=\{0,\frac{1}{n}\quad|\ \forall n\in\mathbb{N}\}$ 时, 有
$$\begin{aligned}&E/R_0=\{\{0\},\{\frac{1}{n}\quad|\ \forall n\in\mathbb{N}\}\},\\&\mathcal{S}_{R_0}=\{\emptyset,\{\{\frac{1}{n}\quad|\ \forall n\in\mathbb{N}\}\},\{\{0\},\{\frac{1}{n}\quad|\ \forall n\in\mathbb{N}\}\}\}.\end{aligned}$$

当 $E=\{-\frac{1}{n},0,\frac{1}{n}\quad|\ \forall n\in\mathbb{N}\}$ 时, 有
$$\begin{aligned}&E/R_0=\{\{-\frac{1}{n}\ |\ \forall n\in\mathbb{N}\},\{0\},\{\frac{1}{n}\quad|\ \forall n\in\mathbb{N}\}\},\\&\mathcal{S}_{R_0}=\{\emptyset,\{\{-\frac{1}{n}\ |\ \forall n\in\mathbb{N}\}\},\{\{\frac{1}{n}|\ \forall n\in\mathbb{N}\}\},\{\{0\},\{-\frac{1}{n}|\ \forall n\in\mathbb{N}\},\{\frac{1}{n}\ |\ \forall n\in\mathbb{N}\}\}\}.\end{aligned}$$

(3) 当 E 是闭区间 $[0,1]$ 上的 Cantor 三分集时, E 的 Hausdorff 维数是 $s_0=\frac{\ln 2}{\ln 3}$, s_0 - 维 Hausdorff 测度是 1, 因此对所有 $s>s_0$, 有 $E/R_0=\{E\}$, $\mathcal{S}_{R_0}=\{\emptyset,\{E\}\}$; 而对 $0\le s\le s_0$ 的情况, 对任意 $x\in E$, 当 x 是某个空格区间的端点时, x^* 由该空格区间的两个端点组成, 如 $\frac{1}{3}$ 的等价类是由 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3}$ 构成, 否则当 x 不是某个空格区间的端点时, x^* 只含有唯一的 x.

对任意 $s\ge 0$, 针对于 $(E,\mathcal{S})$ 在等价关系 R_s 下的商拓扑空间 $(E/R_s,\mathcal{S}_{R_s})$, 令 π 是从 E 到 E/R_s 的自然映射. 取 E 上的集合系 $\mathcal{H}_s=\{\pi^{-1}(V)\quad/\ V\in\mathcal{S}_{R_s}\}$, 根据商拓扑空间的定义, π 是连续映射, 因此集合系 $\mathcal{H}_s$ 是 E 上的一个由 R_s 确定的拓扑. 由此定义

定义 4.4 称 $\mathcal{H}_s$ 是 E 上的 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑, 称 $(E,\mathcal{H}_s)$ 是 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑空间.

下面针对于例 2 中的一些例子给出其 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑的表达式.

例 3 (1) 当 E 是 $\mathbb{R}$ 中的一个有限子集时, 对任意 $s\ge 0$, 有 $\mathcal{H}_s=\{\emptyset,E\}$.

(2) 当 $E=\{0,\frac{1}{n}\quad|\ \forall n\in\mathbb{N}\}$ 时, 有 $\mathcal{H}_0=\{\emptyset,E-\{0\},E\}$ 及 $\mathcal{H}_s=\{\emptyset,E\}$ $(s>0)$.

(3) 当 E 是闭区间 $[0,1]$ 上的 Cantor 三分集时, 有 $\mathcal{H}_s=\{\emptyset,E\}$ $(s>\frac{\ln 2}{\ln 3})$, 而对 $0\le s\le\frac{\ln 2}{\ln 3}$ 的情况下 $\mathcal{H}_s$ 是由 S 中的开集簇 $\{(a,b)\cap E\}$ 通过任意并和有限交生成的拓扑, 其中 a 满足当 $a\notin E$ 时 $a=-\infty$, 当 $a\in E$ 时 a 是除了所有各级空格区间的左端点之外的所有点. 类似地, b 需满足当 $b\notin E$ 时 $b=+\infty$, 当 $b\in E$ 时 b 为除了所有各级空格区间的右端点之外的所有点.

对于更一般的 $E \subseteq \mathbb{R}$, E 上的 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑可以通过下述定理 4.6 加以描述.

首先由商拓扑空间 $(E/R_s, \mathcal{S}_{R_s})$ 和 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑空间 $(E, \mathcal{H}_s)$ 的定义可得如下引理.

引理 4.5 设 $U \in \mathcal{S}$, 有 $U \in \mathcal{H}_s$ 的充分必要条件是 $\forall x \in U$, x 在等价关系 R_s 下的等价类 $x^* \subset U$. 特别是当 E 中的点 x 在等价关系 R_s 下的等价类 x^* 不包含 E 的 $\mathcal{H}^s$ - 聚点时, 有 $x^* \in \mathcal{H}_s$ 成立.

证 按照定义有 $U \in \mathcal{H}_s \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{S}_{R_s}$ 使得 $U = \pi^{-1}(V) \in \mathcal{S}$, 又

$$\pi^{-1}(V) = \{x \in E \quad | \ x^* \in V\} = \bigcup_{x \in U} x^*,$$

因此有 $U \in \mathcal{H}_s$ 当且仅当 $\forall x \in U, x^* \subset U$.

当 E 中的点 x 在等价关系 R_s 下的等价类 x^* 不包含 E 的 $\mathcal{H}^s$ - 聚点时, 由命题 4.2, E 的任何一个 $\mathcal{H}^s$ - 聚点只能严格大于或者严格小于 x^* 的每一个点, 因此可表 x^* 为一个 $\mathbb{R}$ 中包含 x^* 的开区间与 E 的交集. 即 $x^* \in \mathcal{S}$, 所以有 $x^* \in \mathcal{H}_s$ 成立. 证毕

由该引理知集合 E 上的 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑是 E 上的欧氏拓扑 $\mathcal{S}$ 中满足引理条件的所有开集构成的子拓扑. 因此可得 E 上的 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑的生成基如下.

定理 4.6 对任意 $E \subseteq \mathbb{R}$ 和 $s \geq 0$. 若令 E_1 是由 $-\infty$ 和 E 中的所有点的 R_s - 等价区间是左开时的左端点及是右闭时的右端点共同构成的集合, E_2 是由 $+\infty$ 和 E 中的所有点的 R_s - 等价区间是左闭时的左端点和是右开时的右端点共同构成的集合, 则有 E 上的 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑 $\mathcal{H}_s$ 是由 $\mathcal{S}$ 中的开集簇 $\{(a, b) \cap E\}$ 生成的拓扑, 其中 $a \in E_1, b \in E_2$.

证 令 Ω 为 E 上的欧氏拓扑 $\mathcal{S}$ 中满足定理条件的开集簇 $\{(a, b) \cap E\}$.

一方面对任意的 $U \in \Omega$, 即存在满足定理条件的 $a \in E_1$ 和 $b \in E_2$ 使得 $U = (a, b) \cap E$. 任取 $x \in U$, 有 $a < x < b$ 成立, 由 E_1 和 E_2 的定义知 x 在等价关系 R_s 下的等价类 x^* 包含在 U 中, 所以 $\Omega \subseteq \mathcal{H}_s$.

另一方面对任意的 $U \in \mathcal{H}_s$, 由引理 4.5 知 $U \in \mathcal{S}$ 且 $\forall x \in U$ 有 x 在等价关系 R_s 下的等价类 $x^* \subset U$. 任取 $x \in U$, 由于 $x^* \subset U \in \mathcal{S}$, 因此存在 x^* 在 $\mathcal{S}$ 中一个充分小的邻域 U_{x^*} 使得 $x^* \subset U_{x^*} \subset U$, 并且可表 $U_{x^*} = (a(x), b(x)) \cap E \in \Omega$, 比如当 E 中小于 x 的每一点 y 的 R_s - 等价区间 $I(y)$ 都是左闭右开时取 $a(x)$ 为 $-\infty$, 否则存在 $y < x$ 使得 $I(y)$ 是左开的或右闭的区间, 可取 $a(x)$ 为 $I(y)$ 是左开时的左端点或者右闭时的右端点. 类似也可选取 $b(x)$ 或者为 $+\infty$ 或者为大于 x 的某个点 y 的 R_s - 等价区间的左闭端点或右开端点. 这样即可表示 $U = \bigcup\limits_{x \in U} U_{x^*} = \bigcup\limits_{x \in U} ((a(x), b(x)) \cap E)$, 因此 U 属于 Ω 生成的拓扑中. 证毕

定理 4.7 对任意 $E \subseteq \mathbb{R}$, E 上的 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑 $\mathcal{H}_s$ 在欧氏拓扑 $\mathcal{S}$ 中随着 s 的增大而逐步加粗, 即对任意 $0 \leq s_1 \leq s_2$ 有关系式 $\mathcal{H}_{s_2} \subseteq \mathcal{H}_{s_1} \subseteq \mathcal{S}$ 成立.

证 对任意 $0 \leq s_1 \leq s_2$, 由命题 4.2 知 E 中的两个点 x, y 若有关系 $x R_{s_1} y$, 则一定有 $x R_{s_2} y$ 成立. 因此由命题 4.3 可得 E 中任意点在关系 R_{s_1} 下的等价类一定包含在关系 R_{s_2} 下的等价类中, 再由引理 4.5 可得关系式 $\mathcal{H}_{s_2} \subseteq \mathcal{H}_{s_1} \subseteq \mathcal{S}$ 成立. 证毕.

下面将讨论 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑空间 $(E, \mathcal{H}_s)$ 的连通性问题. 首先给出 $(E, \mathcal{H}_s)$ 是连通的充分必要条件.

定理 4.8 设 $E \subseteq \mathbb{R}$, 令 I 是包含 E 的最小区间. $\forall s \geq 0$, $\mathcal{H}^s$ - 拓扑空间 $(E, \mathcal{H}_s)$ 是连通的充分必要条件是 $\bigcup\limits_{x \in E} I(x) = I$, 其中 $I(x)$ 是 x 所属的 R_s - 等价区间.

证 先证充分性. 任取 $x_0 \in E$, 令 $U(x_0)$ 为拓扑空间 $(E,\mathcal{H}_s)$ 中包含 x_0 的连通分支 (即 $U(x_0)$ 为 $\mathcal{H}_s$ 中包含 x_0 的最大连通开集), 并取

$$U^{c-}(x_0)=\{x \mid x\in E, x\notin U(x_0), x<x_0\},$$
$$U^{c+}(x_0)=\{x \mid x\in E, x\notin U(x_0), x>x_0\},$$

有 $U^{c-}(x_0), U^{c+}(x_0)\in\mathcal{H}_s$. 现取 $a_1(x_0)$ 和 $a_2(x_0)$ 分别为 $U(x_0)$ 与 $U^{c-}(x_0)$ 和 $U^{c+}(x_0)$ 的分界点, 可表

$$U^{c-}(x_0)=(-\infty,a_1(x_0))\cap E,$$
$$U(x_0)=(a_1(x_0),a_2(x_0))\cap E,$$
$$U^{c+}(x_0)=(a_2(x_0),+\infty)\cap E,$$

并注意到 $a_1(x_0)$ 和 $a_2(x_0)$ 都不属于 $\bigcup\limits_{x\in E} I(x)$. 由条件 $\bigcup\limits_{x\in E} I(x)=I$ 可得 $a_1(x_0)$ 和 $a_2(x_0)$ 都不属于 I, 因此 $U^{c-}(x_0)=U^{c+}(x_0)=\emptyset$, 即 $E=U(x_0)$ 是连通的.

下面采用反证法证明必要性. 若 $\bigcup\limits_{x\in E} I(x)\neq I$, 则存在 $x_0\in I$ 而 $x_0\notin\bigcup\limits_{x\in E} I(x)$. 令

$$U_1=(-\infty,x_0)\cap E, U_2=(x_0,+\infty)\cap E,$$

由引理 4.5 知 $U_1,U_2\in\mathcal{H}_s$, 且 $E=U_1\cup U_2$ 但 $U_1\cap U_2=\emptyset$, 这与 $(E,\mathcal{H}_s)$ 是连通的产生矛盾. 证毕

由于对拓扑空间上的拓扑经过加粗之后保持连通性不变, 因此存在 $0\le s_0\le 1$ 使得当 $\forall 0\le s<s_0$ 时拓扑空间 $(E,\mathcal{H}_s)$ 不是连通的, 当 $\forall s>s_0$ 时拓扑空间 $(E,\mathcal{H}_s)$ 是连通的. 为此给出下面的 $\mathcal{H}^s$ - 连通度的定义.

定义 4.9 设 $E\subseteq\mathbb{R}$, 称使得 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑空间 $(E,\mathcal{H}_s)$ 是连通的和不是连通的 s 的分界点 s_0 为 E 的 $\mathcal{H}^s$ - 连通度, 用 $l(E)$ 表示. 即

$$\begin{aligned} l(E) &= \inf\{s \mid s>s_0\text{且}(E,\mathcal{H}_s)\text{是连通的}\} \\ &= \sup\{s \mid 0\le s<s_0\text{且}(E,\mathcal{H}_s)\text{不是连通的}\}. \end{aligned}$$

集合 E 的 $\mathcal{H}^s$ - 连通度反映了其 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑空间 $(E,\mathcal{H}_s)$ 可连通的程度. 自然可提出如下一些问题, 什么情况下 E 的 $\mathcal{H}^s$ - 连通度等于零; 是否存在 $\mathcal{H}^s$ - 连通度严格介于 0 和 1 之间的集合. 为此由下面定理 4.10 和例 4 给出相应的结论.

定理 4.10 若 E 是欧氏空间 $(\mathbb{R},T)$ 中的闭子集, 则 E 的 $\mathcal{H}^s$ - 连通度 $l(E)=0$.

证 只需证明 E 的 $\mathcal{H}^0$ - 拓扑空间 $(E,\mathcal{H}_0)$ 是连通的. 设 I 是包含 E 的最小区间, $I(x)$ 是 E 中的点 x 所属的 R_0 - 等价区间, 将证明等式 $\bigcup\limits_{x\in E} I(x)=I$ 成立, 从而由定理 4.8 即得所需结论.

首先包含关系 $\bigcup\limits_{x\in E} I(x)\subseteq I$ 自然成立. 现证 $\bigcup\limits_{x\in E} I(x)\supseteq I$. 任取 $x\in I$, 当 $x\in E$ 时有 $x\in I(x)$; 当 $x\notin E$ 时, 由于 E 是欧氏空间 $(\mathbb{R},T)$ 中的闭子集, 因而 I 是闭区间, 从而存在 $x_1,x_2\in E$ 使得 $x_1<x<x_2$ 且 $(x_1,x_2)\cap E=\emptyset$, 因此有 $x_1R_0x_2$ 成立, 即 $x\in I(x_1)=I(x_2)$.

推论 4.11 设 E 是由迭代函数系 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 生成的分形不变紧集, 且对每个 $i=1,\cdots,n$, f_i 的 Lipschitz 常数 c_i 满足 $0\le c_i<1$. 则对任意 $s\ge 0$, E 的 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑空间 $(E,\mathcal{H}_s)$ 是连通的紧空间.

例 4 闭区间 $[0,1]$ 上的 Cantor 三分集 E 是由迭代函数系 $\{\frac{1}{3}x,\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\}$ 生成的分形不变紧集, $\mathcal{H}^s$ - 连通度 $l(E)=0$. 当去掉 E 的某个空格区间的一个端点变为 E' 时, 虽然 E 和 E' 具有相同的 Hausdorff 维数和 Hausdorff 测度, 分别为 $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ 和 1, 但 E' 的 $\mathcal{H}^s$ - 连通度 $l(E')=\frac{\ln 2}{\ln 3}$. 比如令 $E'=E-\{\frac{1}{3}\}$, 当 $0\le s\le\frac{\ln 2}{\ln 3}$ 时, 令 $U_1=[0,\frac{1}{3})\cap E', U_2=(\frac{1}{3},1]\cap E'$, 有 $U_1,U_2\in\mathcal{H}_s$ 且 $E'=U_1\cup U_2$ 和 $U_1\cap U_2=\emptyset$, 此时 $(E',\mathcal{H}_s)$ 不再是连通的, 而是由两个连通分支 U_1,U_2 组成. 当 $s>\frac{\ln 2}{\ln 3}$ 时, E' 的 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑 $\mathcal{H}_s=\{\emptyset,E'\}$ 是平凡的, 因而 $(E',\mathcal{H}_s)$ 是连通的.

一般的分形集 E 在欧氏拓扑下往往是不连通的 Hausdorff 分离空间, 定理 4.10 表明在 E 上对欧氏拓扑进行加粗之后形成的 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑空间的连通性变好了, 但分离性又变差了. 对任意 $s\ge 0$, 如果 E 中的每个点 x 在等价关系 R_s 下的等价类 x^* 只包含唯一的 x, 则 E 上的欧氏拓扑和 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑是一样的, $(E,\mathcal{H}_s)$ 仍是 Hausdorff 分离空间. 如果一旦 E 中的某个点 x 在等价关系 R_s 下的等价类 x^* 包含了两个不同的点 x_1 和 x_2, 则由引理 4.5 知 x_1 和 x_2 不能通过 $\mathcal{H}_s$ 中的开集分离开来. 因此有下述性质.

命题 4.12 设 E 是 $\mathbb{R}$ 的任意子集. 对任意 $s\ge 0$, E 的 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑空间 $(E,\mathcal{H}_s)$ 是 Hausdorff 分离空间的充分必要条件是 E 中任意点 x 在等价关系 R_s 下的等价类 x^* 只包含唯一的 x.

5 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑空间之间映射的连续性

由连续映射的定义, 两个拓扑空间之间的一个映射是连续的当且仅当开集的原像还是开集. 本节作为前面讨论的 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑空间的应用, 建立了直线上一个 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑空间和一个 $\mathcal{H}^t$ - 拓扑空间之间映射的连续性理论. 任取直线上的两个子集 E 和 F, 设 f 是一个从 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑空间 $(E,\mathcal{H}_s)$ 和 $\mathcal{H}^t$ - 拓扑空间 $(F,\mathcal{H}_t)$ 之间的映射, 首先由定理 4.7 一个集合的 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑随 s 的增大而逐步加粗, 因此有下述性质.

命题 5.1 若 f 是从 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑空间 $(E,\mathcal{H}_s)$ 到 $\mathcal{H}^t$ - 拓扑空间 $(F,\mathcal{H}_t)$ 的连续映射, 则对任意 $u\le s$ 和 $v\ge t$, 有 f 为一个从 $(E,\mathcal{H}_u)$ 到 $(F,\mathcal{H}_v)$ 的连续映射.

定理 5.2 对任意 $s,t\ge 0$, 作为 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑空间 $(E,\mathcal{H}_s)$ 和 $\mathcal{H}^t$ - 拓扑空间 $(F,\mathcal{H}_t)$ 之间的映射 f 是连续映射的充分必要条件是 f 在 E 中的所有 $\mathcal{H}^s$ - 聚点处连续, 并且对任意的 $x,y\in E$, 若有关系 xR_sy, 则关系 $f(x)R_tf(y)$ 成立.

证 必要性 一方面若 f 是从空间 $(E,\mathcal{H}_s)$ 到 $(F,\mathcal{H}_t)$ 的连续映射, 则 f 在 E 中每一点都连续, 因而函数 f 在 E 中的所有 $\mathcal{H}^s$ - 聚点处也连续; 另一方面若 E 中的点 x 不是 E 的 $\mathcal{H}^s$ - 聚点, 设 $V(f(x))$ 为 $(F,\mathcal{H}_t)$ 中 $f(x)$ 的任意开邻域, 由条件得 $f^{-1}(V(f(x)))$ 是 $(E,\mathcal{H}_s)$ 中 x 的开邻域. 对任意 $y\in E$, 当等价关系 xR_sy 成立时, 由引理 4.5 有 $y\in f^{-1}(V(f(x)))$, 因而 $f(y)\in V(f(x))$, 再由 $V(f(x))$ 作为 $f(x)$ 的开邻域的任意性, 得等价关系 $f(x)R_tf(y)$ 成立.

充分性 设函数 f 在 E 中的所有 $\mathcal{H}^s$ - 聚点处连续, 且对任意的 $x,y\in E$, 当有关系 xR_sy 时有关系 $f(x)R_tf(y)$ 成立. 任取 $x\in E$, 当 x 不是 E 的 $\mathcal{H}^s$ - 聚点时, 任取 $V(f(x))$ 为 $(F,\mathcal{H}_t)$ 中 $f(x)$ 的开邻域, 将证明其逆像 $f^{-1}(V(f(x)))$ 为 x 的开邻域来得到 $f(x)$ 在 x 处连续. 当 $f^{-1}(V(f(x)))$ 不包含 E 中的 $\mathcal{H}^s$ - 聚点时, 一方面由条件 $f^{-1}(V(f(x)))$ 是由其中的所

有点在关系 R_s 下的等价类的并构成. 另一方面由引理 4.5 的第二个结论 $f^{-1}(V(f(x)))$ 的每一点关系 R_s 下的等价类属于 $\mathcal{H}_s$, 因此有 $f^{-1}(V(f(x)))\in\mathcal{H}_s$ 成立. 当 $f^{-1}(V(f(x)))$ 包含 E 中的某个 $\mathcal{H}^s$ - 聚点 y 时, 有 $V(f(x))$ 是 $f(y)$ 在 $(F,\mathcal{H}_t)$ 中的开邻域, 由条件 $f(x)$ 在 y 处连续, 得 $f^{-1}(V(f(x)))$ 是 y 在 $(E,\mathcal{H}_s)$ 中的开邻域, 因此 $f^{-1}(V(f(x)))$ 是 x 的开邻域. 证毕.

对任意 $0\le t\le 1$, 由于实数集 $\mathbb{R}$ 的 $\mathcal{H}^t$ - 拓扑 $\mathcal{H}_t$ 就是欧氏拓扑 T, 并且 $\mathbb{R}$ 中的每个点 y 在关系 R_t 下的等价类只包含唯一的 y, 因此由定理 5.2 可得如下推论.

推论 5.3 设 f 是 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑空间 $(E,\mathcal{H}_s)$ 到欧氏拓扑空间 $(\mathbb{R},T)$ 的实函数. f 是连续函数的充分必要条件是 f 在 E 中的所有 $\mathcal{H}^s$ - 聚点处连续, 并且对任意的 $x,y\in E$, 若有关系 xR_sy, 则 $f(x)=f(y)$.

由此可得, 若 f 是 $\mathcal{H}^s$ - 拓扑空间 $(E,\mathcal{H}_s)$ 到欧氏拓扑空间 $(\mathbb{R},T)$ 的连续实函数, 则 $f(x)$ 在 E 中的所有 $\mathcal{H}^s$ - 聚点处的极限值等于在该点处的函数值, 并且在 E 中每一点在 R_s 下的等价类上取常值. 特别是当 E 为 $(\mathbb{R},T)$ 中的紧子集时, 由定理 4.10 知 $(E,\mathcal{H}_s)$ 是连通的紧空间, $f(E)$ 是 $(\mathbb{R},T)$ 中的连通紧集, 因而是有界闭区间, 所以这样的函数一定具有有界性、最值性、介值性和一致连续性等.

参 考 文 献

[1] 凯莱. 一般拓扑学 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[2] Falconer K J. Fractal geometry–mathematical foundations and applications[M]. New York: John Wiley, 1990.

[3] 曾超益, 袁德辉. 含参变量 Cantor 集的 Hausdorff 测度 [J]. 数学杂志, 2011, 31(4): 729–737.

[4] Oldham K B, Spanier J. The fractional calculus[M]. New York: Academic Press, 1974.

[5] Tatom F B. The relationship between fractional calculus and fractals[J]. Fractals, 1995, 3(1): 217–229.

[6] Rudin W. Principles of mathematical ananlysis[M]. New York: McGraw-Hill, 1964.

[7] He Zhenya. Non-linear parabolic equations on self-simiar fractal sets[J]. J. Math., 2010, 30(1): 1–8.

THE $\mathcal{H}^s$-TOPOLOGY ON A SUBSET IN REAL LINE AND ITS APPLICATIONS

LONG Lun-hai, LIANG Li, SAN Jia-jun

(*School of Information, Hainan University, Haikou 570228, China*)

Abstract: In this paper, by using the s-dimensional Hausdorff measure, we give the concepts of $\mathcal{H}^s$-Topology and $\mathcal{H}^s$-connectivity on a subset in real line, discuss their properties and some applications. In addition, the disconnected problem of a compact s-set under the Euclidean topology is solved.

Keywords: fractal; Hausdorff measure; $\mathcal{H}^s$-Topology; $\mathcal{H}^s$-connectivity

2010 MR Subject Classification: 28A80; 54F65