

一类无界算子矩阵的本质谱

那仁朝克图¹, 齐雅茹², 黄俊杰¹

(1. 内蒙古大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特 010021)

(2. 内蒙古工业大学理学院, 内蒙古 呼和浩特 010051)

摘要: 本文研究了次对角占优的无界算子矩阵 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的左本质谱和本质谱. 利用分析方法和分块算子的性质, 得到了整个算子矩阵的本质谱 (左本质谱) 与其内部元素的本质谱 (左本质谱) 之间的关系.

关键词: 无界算子矩阵; Fredholm 算子; 左本质谱; 本质谱

MR(2010) 主题分类号: 47A10; 47A53

中图分类号: O177.1

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2017)03-0481-07

1 引言

算子矩阵是线性算子理论的重要内容之一, 它在偏微分方程、插值理论、最优控制理论以及流体力学、量子力学、磁流体力学等学科都得到了广泛的应用. 而本文研究的无界算子矩阵的本质谱是近年来算子矩阵理论中比较活跃的研究课题之一, 国内外很多学者对其做了许多研究工作. 如 2002 年, Djordjević 对上三角型缺项算子矩阵的本质谱进行了研究^[7]. 自 2005 年至今, 国内的曹小红博士研究了一类 2×2 阶上三角缺项算子矩阵的本质谱的扰动^[8]. 海国君博士在文 [2] 中分别给出了两类 2×2 阶缺项算子矩阵的左右本质谱和本质谱的扰动问题. 以上论文主要关注于有界算子的情形 (其他相关文献可见文 [3, 4]). 但在数学物理问题中遇到的微分算子是无界算子, 所以无界算子的本质谱的研究亦具有重要的研究价值. 对无界算子矩阵, 国外学者 Atkinson, Langer, Mennicken 和 Shkalikov 在文 [5] 中讨论了无界算子矩阵的本质谱问题, Tretter 在文 [6] 中, 从定义域分类的角度继续讨论了某类无界算子矩阵的本质谱问题. 相比于有界情形, 研究无界算子矩阵将会遇到如下困难: (1) 算子矩阵的定义域更加复杂; (2) 对于闭算子 T 和 S 而言, $T + S$ 和 TS 不一定是闭算子; (3) 对于无界算子 T 和 S 而言, $T^{-1}S$ 和 ST^{-1} 不一定是无界算子. 在文献 [5] 的主要结论中假设 $T^{-1}S$ 是紧算子, 文 [6] 的主要结论中假设 $T^{-1}S$ 是有界算子. 而本文利用不同于以上两篇文献的方法, 有效地避免了判断 $T^{-1}S$ 类算子的有界性问题, 研究了次对角占优的无界算子矩阵的左本质谱和本质谱, 并得到了算子矩阵的本质谱与其元素的本质谱之间的一个充要条件.

*收稿日期: 2015-10-08

接收日期: 2015-12-16

基金项目: 国家自然科学基金 (11371185; 11461049); 内蒙古自然科学基金重大项目 (2013ZD01); 内蒙古自然科学基金 (2013JQ01; 2015BS0105); 内蒙古工业大学自然科学基金 (X201515).

作者简介: 那仁朝克图 (1986-), 男, 蒙古族, 内蒙古通辽, 硕士, 主要研究方向: 算子理论.

通讯作者: 黄俊杰.

2 预备知识

在本文, X 表示无穷维 Hilbert 空间, $B(X)$ 表示从 X 到 X 的有界线性算子构成的 Banach 空间. 对于线性算子 T 而言, $\rho(T)$, $\sigma_{le}(T)$, $\sigma_{re}(T)$ 及 $\sigma_{ess}(T)$ 分别表示预解集, 左本质谱, 右本质谱及本质谱.

定义 1^[1] 设 X 是 Hilbert 空间, $T : D(T) \subseteq X \rightarrow X$ 是闭线性算子, 如果存在复数 λ , 使得

- (1) $T_\lambda = \lambda I - T$ 的值域 $R(\lambda I - T) = (\lambda I - T)D(T) = X$,
- (2) $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$ 存在 (当且仅当 $\lambda I - T$ 为单射),
- (3) $R(\lambda, T)$ 是有界线性算子,

则称 λ 为 T 的正则值, T 的正则值的全体称为 T 的预解集, 记为 $\rho(T)$, 由闭图像定理可知

$$\rho(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ 为单射且 } R(\lambda I - T) = X \}.$$

算子理论中, Fredholm 算子的研究非常重要, 其基本性质可见于文献 [1, 10, 12–14]. 下面给出 Fredholm 算子的定义.

定义 2^[15] 设 T 是 Banach 空间 X 中的稠定闭线性算子, $N(T)$ 和 $R(T)$ 分别表示 T 的零空间和值域. 定义

$$\begin{aligned} \text{nul}(T) &:= \dim N(T), \\ \text{def}(T) &:= \dim(X/R(T)). \end{aligned}$$

- (1) 如果 $\text{nul}(T)$ 是有限的且 $R(T)$ 是闭的, 称 T 是左 Fredholm 算子.
- (2) 如果 $\text{def}(T)$ 是有限的且 $R(T)$ 是闭的, 称 T 是右 Fredholm 算子.
- (3) 如果 $\text{nul}(T)$ 和 $\text{def}(T)$ 都是有限的且 $R(T)$ 是闭的, 称 T 是 Fredholm 算子.
- (4) 如果算子 T 是左 Fredholm 算子或右 Fredholm 算子, 称 T 为半 Fredholm 算子.

注 有些文献中, 左 Fredholm 算子称为上半 Fredholm 算子, 而右 Fredholm 算子称为下半 Fredholm 算子.

由 Fredholm 算子的定义可以引进本质谱的概念.

定义 3^[15] 设 T 是 Banach 空间 X 中的稠定闭算子, $\lambda \in \mathbb{C}$,

(1) 如果 $\lambda I - T$ 不是左 Fredholm 算子, 称 λ 是 T 的一个左本质谱点, T 的左本质谱点的全体称为 T 的左本质谱, 记为 $\sigma_{le}(T)$. 即有

$$\sigma_{le}(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ 不是左 Fredholm 算子} \};$$

(2) 如果 $\lambda I - T$ 不是右 Fredholm 算子, 称 λ 是 T 的一个右本质谱点, T 的右本质谱点的全体称为 T 的右本质谱, 记为 $\sigma_{re}(T)$. 即有

$$\sigma_{re}(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ 不是右 Fredholm 算子} \};$$

(3) 如果 $\lambda I - T$ 不是 Fredholm 算子, 称 λ 是 T 的一个本质谱点, T 的本质谱点的全体称为 T 的本质谱, 记为 $\sigma_e(T)$. 即有

$$\sigma_{ess}(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ 不是 Fredholm 算子} \}.$$

定义 4 ^[6] 设 E, F, G 是 Banach 空间, $T: D(T) \subset E \rightarrow F, S: D(S) \subset E \rightarrow G$ 是线性算子, 如果 $D(T) \subset D(S)$ 且存在非负常数 a_S, b_S 使得对任意的 $x \in D(T)$, 有

$$\|Sx\| \leq a_S \|x\| + b_S \|Tx\|, \quad (2.1)$$

则称算子 S 相对于 T 有界的, 简称 T -有界; 使得上式成立的所有 b_S 的下确界称为算子 S 关于 T 的相对界, 简称 T -界.

定义 5 ^[6] 给定分块算子矩阵 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$,

- (1) 如果 C 是 A -有界且 B 是 D -有界, 则称 M 对角占优;
- (2) 如果 A 是 C -有界且 D 是 B -有界, 则称 M 次对角占优.

引理 1 ^[13] 设 X, Y, Z 为 Banach 空间. $T: X \rightarrow Y$ 是闭线性算子且具有闭值域. $\text{nul}(T) < \infty, C: Z \rightarrow X$ 为闭线性算子, 则 TC 是一个闭算子.

引理 2 ^[13] 设 X, Y, Z 为 Banach 空间. $T: X \rightarrow Y$ 是稠定 Fredholm 算子, $S: Z \rightarrow X$ 是一个 Fredholm 算子, 则 TS 为 Fredholm 算子.

引理 3 ^[15] 设 T 和 A 是 Hilbert 空间 $X \rightarrow Y$ 的线性算子, 如果算子 A 相对于 T 是有界且 T -界 < 1 , 则 $S = T + A$ 可闭 (或闭) 当且仅当 T 可闭 (或闭).

3 主要结果及其证明

定理 4 设 X 为 Hilbert 空间, 算子矩阵 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}: D(C) \times D(B) \subseteq X \times X \rightarrow X \times X$ 为次对角占优的闭算子, 记其中 D 为可闭算子, C 为闭算子, B 具有有界逆. 如果存在 a_D, b_D, b_A 满足 $(a_D \|B^{-1}\| + b_D) b_A < 1$, 则有 $\lambda \in \sigma_{le}(M)$ 当且仅当 $0 \in \sigma_{le}(\Delta_1)$, 其中 $\Delta_1 = C - (\lambda I - D) B^{-1}(\lambda I - A)$, a_D, b_D, b_A 分别为相对有界定义中 ((2.1) 式) 的系数.

证 由本质谱的定义可知要证明 $\lambda \in \sigma_{le}(M)$ 当且仅当 $0 \in \sigma_{le}(\Delta_1)$, 只需证明 $\lambda I - M$ 是左 Fredholm 算子当且仅当 Δ_1 是左 Fredholm 算子即可.

(1) 设 $\lambda I - M$ 是左 Fredholm 算子, 要证 Δ_1 是左 Fredholm 算子, 由定义只需证明 Δ_1 是闭算子, $R(\Delta_1)$ 是闭的且 $\text{nul}(\Delta_1) < \infty$.

下面分三步来证明.

(i) 因为存在 a_D, b_D, b_A 满足 $(a_D \|B^{-1}\| + b_D) b_A < 1$, 要证明 Δ_1 为闭算子, 由引理 3 可知只需证明 $(\lambda I - D) B^{-1}(\lambda I - A)$ 相对于 C 有界且相对界小于 1 即可. 事实上

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - D) B^{-1}(\lambda I - A)x\| &\leq a_D \|B^{-1}(\lambda I - A)x\| + b_D \|(\lambda I - A)x\| \\ &\leq a_D \|B^{-1}\| \|(\lambda I - A)x\| + b_D \|(\lambda I - A)x\| \\ &\leq (a_D \|B^{-1}\| + b_D) \|(\lambda I - A)x\| \\ &\leq (a_D \|B^{-1}\| + b_D)(a_A \|x\| + b_A \|Cx\|), \end{aligned}$$

所以当 $(a_D \|B^{-1}\| + b_D) b_A < 1$ 时, $C - (\lambda I - D) B^{-1}(\lambda I - A)$ 是闭算子, 即 Δ_1 是闭算子.

(ii) 证明 $R(\Delta_1)$ 是闭的.

对任意的 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset R(\Delta_1)$, 若 $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$), 只需证明 $x \in R(\Delta_1)$. 此时存在 $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset D(C)$ 使得 $[C - (\lambda I - D) B^{-1}(\lambda I - A)]y_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$), 即

$$Cy_n - (\lambda I - D) B^{-1}(\lambda I - A)y_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty).$$

令 $z_n = B^{-1}(\lambda I - A)y_n$, 则有 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(B)$, 所以有 $(\lambda I - A)y_n = Bz_n, Cy_n - (\lambda I - D)z_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$), 即

$$\begin{pmatrix} \lambda I - A & -B \\ -C & \lambda I - D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -x \end{pmatrix} (n \rightarrow \infty).$$

由已知 $R(\lambda I - M)$ 是闭的, 于是 $\begin{pmatrix} 0 \\ -x \end{pmatrix} \in R(\lambda I - M)$, 即存在 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in D(B) \times D(C)$, 使得

$$\begin{pmatrix} \lambda I - A & -B \\ -C & \lambda I - D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x \end{pmatrix},$$

即

$$(\lambda I - A)x' - By' = 0, \quad (3.1)$$

$$Cx' - (\lambda I - D)y' = x. \quad (3.2)$$

由于 B 具有有界逆, $D(B) \subseteq D(D)$ 且 D 是可闭算子, 由闭图像定理知 $(\lambda I - D)B^{-1}$ 是 X 上的有界算子, 因此用 $(\lambda I - D)B^{-1}$ 分别作用于方程 (3.1) 的两边得

$$(\lambda I - D)B^{-1}(\lambda I - A)x' - (\lambda I - D)y' = 0, \quad (3.3)$$

再由方程 (3.2) 和 (3.3) 可得

$$[C - (\lambda I - D)B^{-1}(\lambda I - A)]x' = x. \quad (3.4)$$

又因为 $x' \in D(C)$, 所以 $x \in R(\Delta_1)$, 即 $R(\Delta_1)$ 是闭的.

(iii) 证明 $\text{nul}(\Delta_1) < \infty$.

对于任意的 $y \in N(\Delta_1)$, 有 $[C - (\lambda I - D)B^{-1}(\lambda I - A)]y = 0$, 即

$$(\lambda I - D)B^{-1}(\lambda I - A)y = Cy, \quad y \in D(C),$$

从而有

$$\begin{pmatrix} \lambda I - A & -B \\ -C & \lambda I - D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ B^{-1}(\lambda I - A)y \end{pmatrix} = 0,$$

所以

$$\begin{pmatrix} y \\ B^{-1}(\lambda I - A)y \end{pmatrix} \in N(\lambda I - M).$$

又因为 $\text{nul}(\lambda I - M) < \infty$, 所以 $\text{nul}(\Delta_1) < \infty$.

综上 (i)、(ii)、(iii) 知, 若 $\lambda I - M$ 是左 Fredholm 算子, 则 Δ_1 是左 Fredholm 算子.

(2) 若 Δ_1 是左 Fredholm 算子, 要证 $\lambda I - M$ 是左 Fredholm 算子, 只需证明 (i) $R(\lambda I - M)$ 是闭的; (ii) $\text{nul}(\lambda I - M) < \infty$ 即可.

下面分别证明上述两个命题:

(i) $R(\lambda I - M)$ 是闭的.

对任意的 $\left\{ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\}_{n=1}^{\infty} \subset R(\lambda I - M)$, 存在 $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} \right\}_{n=1}^{\infty} \subset D(C) \times D(B)$, 使得

$$\begin{pmatrix} \lambda I - A & -B \\ -C & \lambda I - D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

若 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (n \rightarrow \infty)$, 有

$$(\lambda I - A)\alpha_n - B\beta_n \rightarrow x, \quad (3.5)$$

$$-C\alpha_n + (\lambda I - D)\beta_n \rightarrow y. \quad (3.6)$$

由于 B 具有有界逆, $D(B) \subseteq D(D)$ 且 D 是可闭算子, 故 $(\lambda I - D)B^{-1}$ 是 X 上的有界算子, 因此用 $(\lambda I - D)B^{-1}$ 分别作用在方程 (3.5) 的两边得到

$$(\lambda I - D)B^{-1}(\lambda I - A)\alpha_n - (\lambda I - D)\beta_n \rightarrow (\lambda I - D)B^{-1}x, \quad (3.7)$$

再由 (3.6) 和 (3.7) 式可得

$$C - (\lambda I - D)B^{-1}(\lambda I - A)\alpha_n \rightarrow -y - (\lambda I - D)B^{-1}x, \quad (3.8)$$

由于 $R(\Delta_1)$ 是闭的, 故存在 $x'_1 \in D(C)$, 使得

$$[C - (\lambda I - D)B^{-1}(\lambda I - A)]x'_1 = -y - (\lambda I - D)B^{-1}x.$$

若令 $y'_1 = -B^{-1}x + B^{-1}(\lambda I - A)x'_1$, 则有

$$\begin{pmatrix} \lambda I - A & -B \\ -C & \lambda I - D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

易知 $y'_1 \in D(B)$, 即 $\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} \in D(C) \times D(B)$, 因此 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R(\lambda I - M)$, 进而 $R(\lambda I - M)$ 是闭的.

(ii) $\text{nul}(\lambda I - M) < \infty$.

对任意的 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in N(\lambda I - M)$ 有

$$\begin{pmatrix} \lambda I - A & -B \\ -C & \lambda I - D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

即 $(\lambda I - A)x - By = 0$, $-Cx + (\lambda I - D)y = 0$, $x \in D(C)$, $y \in D(B)$. 化简两个等式得 $[C - (\lambda I - D)B^{-1}(\lambda I - A)]x = 0$, 所以 $x \in N(\Delta_1)$, 而由 $\text{nul}(\Delta_1) < \infty$ 和 $y = B^{-1}(\lambda I - A)x$ 知 $\text{nul}(\lambda I - M) < \infty$.

综上 (i) 和 (ii) 知, 若 Δ_1 是左 Fredholm 算子, 则 $\lambda I - M$ 是左 Fredholm 算子.

那么由 (1) 和 (2) 可知对于任意的 $\lambda \in C$, 有 $\lambda \in \sigma_{le}(M)$ 当且仅当 $0 \in \sigma_{le}(\Delta_1)$.

定理 5 设 X 为 Hilbert 空间, 算子矩阵

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : D(C) \times D(B) \subseteq X \times X \rightarrow X \times X$$

为次对角占优的闭算子, 其中 D 为可闭算子, C 为闭算子, B 具有有界逆算子且使得 $B^{-1}A$ 是闭算子, 如果存在 a_D, b_D, b_A 满足 $(a_D \|B^{-1}\| + b_D) b_A < 1$, 则有 $\lambda \in \sigma_{ess}(M)$ 当且仅当 $0 \in \sigma_{ess}(\Delta_1)$, 其中 $\Delta_1 = C - (\lambda I - D) B^{-1}(\lambda I - A)$, a_D, b_D, b_A 的定义同定理 4.

证 由本质谱的定义, 只需证明 $\lambda I - M$ 是 Fredholm 算子当且仅当 Δ_1 是 Fredholm 算子即可. 由条件 $(a_D \|B^{-1}\| + b_D) b_A < 1$ 可知 Δ_1 为闭算子, 由 $0 \in \rho(B)$ 知 B 为闭算子. 下面分解算子 $M = TM_1 S$, 其中

$$T = \begin{pmatrix} I & 0 \\ (D - \lambda I)B^{-1} & I \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} 0 & B \\ \Delta_1 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} I & O \\ B^{-1}(A - \lambda I) & I \end{pmatrix},$$

这里 T 具有有界逆, S 为闭算子且是单射, M_1 为闭算子. 显然, M_1 为 Fredholm 算子当且仅当 Δ_1 为 Fredholm 算子. 若 M_1 为 Fredholm 算子, 即有 $\text{nul}(M_1) < \infty$, $R(M_1)$ 闭, $\text{def} R(M_1) < \infty$. 由引理 1 知, $M_1 S$ 为闭算子且 $R(M_1 S) = R(M_1) (D(M_1) \subset R(S))$, $N(M_1 S) = N(M_1)$, 所以 $M_1 S$ 为 Fredholm 算子. 又因为 T 为全空间上具有有界逆的算子, 从而 T 为 Fredholm 算子. 而 $M = TM_1 S$, 由引理 2 知 M 为 Fredholm 算子. 反之, 若 M 为 Fredholm 算子, T^{-1} 为 Fredholm 算子, 从而 $M_1 S = T^{-1}M$ 为 Fredholm 算子, 进一步可知 Δ_1 为 Fredholm 算子. 所以由本质谱的定义, $\lambda \in \sigma_{ess}(M)$ 当且仅当 $0 \in \sigma_{ess}(\Delta_1)$.

注 对于对角占优情形, 可按完全类似的方法讨论.

参 考 文 献

- [1] Conway J B. A course in functional analysis[M]. New York: Springer Verlag, 1990.
- [2] 海国君. 算子矩阵的补问题和谱 [D]. 呼和浩特: 内蒙古大学, 2010.
- [3] 海国君, 阿拉坦仓. 某类无穷维 Hamilton 算子的 Moore-Penrose 可逆性 [J]. 数学杂志, 2017, 37(2): 358–364.
- [4] 黄俊杰, 吴秀峰, 阿拉坦仓. 3×3 阶上三角算子矩阵的点谱和剩余谱扰动 [J]. 数学杂志, 2017, 36(5): 1056–1066.
- [5] Atkinson F V, Langer H, Mennicken R, Shkalikov A A. The essential spectrum of some matrix operators [J]. Math. Nachr., 1994, 167: 5–20.
- [6] Tretter C. Spectral theory of block operator matrices and applications[M]. London: Imperial College Press, 2008.
- [7] Djordjević D S. Perturbations of spectra of operator matrices [J]. J. Oper. The., 2002, 48(3): 467–486.
- [8] Cao X, Meng B. Essential approximate point spectra and Weyl's theorem for operator matrices[J]. J. Math. Anal. Appl., 2005, 304(2): 759–771.
- [9] Langer H, Tretter C. Diagonalization of certain block operator matrices and applications to Dirac operator Theory[J]. Oper. The. Anal., Oper. The. Adv. Appl., 2001, 122: 331–358.

- [10] Aiena P. Fredholm and local spectral theory, with applications to multipliers[M]. Dordrecht: Kluwer Acad. Pub., 2004.
- [11] Stone M H. Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis[M]. New York: Amer. Math. Soc., 1932.
- [12] Douglas R. G. Banach algebra techniques in operator theory (2nd ed.)[M]. New York: Springer Verlag, 1998.
- [13] Gohberg I, Goldberg S, Kaashoek M A. Classes of linear operators vol.II[M]. Basel: Birkhäuser Verlag, 1990
- [14] Müller V. Spectral theory of linear operators and spectral systems in Banach algebras[M]. Basel: Birkhäuser Verlag, 2007.
- [15] Kato T. Perturbation theory for linear operators[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1995.

THE ESSENTIAL SPECTRUM OF SOME UNBOUNDED BLOCK OPERATOR MATRICES

Narenchaogetu¹, QI Ya-ru², HUANG Jun-jie¹

(1.School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China)

(2.College of Sciences, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010051, China)

Abstract: In this paper, we consider the left essential spectrum and essential spectrum of off-diagonally dominant unbounded block operator matrices $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. By means of analysis method and basic properties of operator matrices, we obtain the relationship between the essential spectrum and essential spectrum of block operator matrices with their entries.

Keywords: unbounded block operator matrix; Fredholm operator; left essential spectrum; essential spectrum

2010 MR Subject Classification: 47A10 ; 47A53