第27卷第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.2
2007年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2007

文章编号: 1000-341X(2007)02-0425-07 **文献标识码**: **A**

具 p-Laplace 算子的三点边值问题正解的存在性

马德香 [1]， 葛渭高 [2]

(1. 华北电力大学 (北京) 数理学院，北京 102206; 2. 北京理工大学应用数学系，北京 100081)
(E-mail: madexiangchen@163.com)

摘　要: 本文用锥上的 Krasnoselskii's 不动点定理研究了具有 p-Laplace 算子的三点边值问题:

$$\begin{cases} (\varphi_p(u'(t)))'+a(t)f(u(t))=0, \quad t\in(0,1),\\ u(0)=\alpha u(\eta),\ u(1)=\beta u(\eta), \end{cases}$$

其中 $0<\alpha,\ \beta<1,\ 0<\eta<1$ 且 $\varphi_p(z)=|z|^{p-2}z,\ p>1$. 在 f 满足一定的增长条件下，得到方程正解的存在性. 作为应用，给出两个例子.

关键词: p-Laplacian; 三点边值；锥； Krasnoselskii's 不动点定理.
MSC(2000): 34B10
中图分类: O175.15

1 引 言

三点边值问题起源于不同的应用数学和物理领域，由于其广泛的实际背景，近年来受到人们普遍关注. 对于线性二阶微分方程三点边值的研究比较早的由文献 [1] 开始，从那以后，三点边值问题被许多学者研究 [1−6].

本文研究下述具有 p-Laplace 算子的非线性二阶方程

$$(\varphi_p(u'))'+a(t)f(u)=0 \tag{1}$$

在三点边值条件

$$u(0)=\alpha u(\eta),\ u(1)=\beta u(\eta) \tag{2}$$

下正解的存在性，其中 $0<\alpha,\ \beta<1,\ 0<\eta<1,\ \varphi_p(z)=|z|^{p-2}z,\ p>1$, 且满足

(H1) $a(t)\in L((0,1),R^+)$; $\int_0^\eta a(t)\mathrm{d}t\neq0,\ \int_\eta^1 a(t)\mathrm{d}t\neq0$;

(H2) $f(u)\in C(R,[0,+\infty))$.

事实上，关于方程 (1) 在满足 Dirichlet 或其他形式的二点边值条件下正解的存在性已有许多研究，例如文献 [7] 中作者利用 Leggett-Williams 不动点定理研究了下述边值问题

$$\begin{cases} (\varphi_p(u'(t)))'+a(t)f(u(t))=0, \quad t\in(0,1),\\ \alpha\varphi_p u(0)-\beta\varphi_p u'(0)=0,\ \gamma\varphi_p u(1)+\delta\varphi_p u'(1)=0 \end{cases}$$

收稿日期: 2004-12-24; **接受日期**: 2005-04-29
基金项目: 国家自然科学基金 (10371006).

正解的存在性. 其他结果见文献 [8–9] 等. 但是方程 (1) 在三点边值条件 (2) 下解的情况还未见有结果.

由 $\varphi_p(u)$ 定义可知 $(\varphi_p)^{-1}(u)$ 存在且 $(\varphi_p)^{-}=\varphi_q$, 其中 $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$. 称 $u(t)$ 为方程 (1) 和 (2) 的正解是指 $u(t)\geq 0$ 满足 (1) 和 (2) 且 $\|u\|\neq 0$.

2 准备工作

记 $I=[0,1]$. 对 $\forall u\in X=C[0,1]$, 定义 $\|u\|=\max\limits_{t\in I}|u(t)|$, 则 X 为一 Banach 空间. 令 $P=\{u|u\in X,\ u(t)\geq 0,\ u(t)$ 是凹的, 且 $u(0)=\alpha u(\eta),\ u(1)=\beta u(\eta)\}$, 则易验证 P 是 X 中的锥.

对给定的 $x\in X$, 设 $u(t)$ 是边值问题

$$\begin{cases}(\varphi_p(u'(t)))'+a(t)f(x(t))=0, & t\in(0,1),\\ u(0)=\alpha u(\eta), u(1)=\beta u(\eta)\end{cases}$$

的解. 则经过整理得

$$u(t)=\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^\eta\varphi_q\left(A_x-\int_0^s a(r)f(x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\int_0^t\varphi_q\left(A_x-\int_0^s a(r)f(x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s,$$

其中 A_x 满足边界条件, 即

$$\frac{1-\beta}{1-\alpha}\int_0^\eta\varphi_q\left(A_x-\int_0^s a(r)f(x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\int_\eta^1\varphi_q\left(A_x-\int_0^s a(r)f(x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s=0. \tag{3}$$

令

$$H(A)=\frac{1-\beta}{1-\alpha}\int_0^\eta\varphi_q\left(A-\int_0^s a(r)f(x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\int_\eta^1\varphi_q\left(A-\int_0^s a(r)f(x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s,$$

则显见 $H(A)$ 关于 A 是严格单调上升的, 且由 (H2) 知 $H(0)\leq 0$, $H\left(\int_0^1 a(r)f(x(r))\mathrm{d}r\right)\geq 0$. 因此, 存在唯一的 $A_x\in[0,\ \int_0^1 a(r)f(x(r))\mathrm{d}r]$ 满足 (3) 式.

引理 2.1 由 (3) 式决定的常数 $A=A_x$ 关于 $x\in X$ 连续.

证明 任取 $x_n\in X$ 在 I 上一致收敛于 $x(t)$. 记 $A_n(n=1,2,\dots)$ 为相应于 $x_n(n=1,2,\dots)$ 的由 (3) 式决定的常数, 记 A_x 为相应于 x 的由 (3) 式决定的常数. 由 $\{x_n\}$ 在 I 上一致收敛于 x 和 $A_n\in[0,\ \int_0^1 a(r)f(x_n(r))\mathrm{d}r]$ 可知 $\{A_n\}$ 是有界的, 从而 $\{A_n\}$ 存在收敛的子列. 不防设 $A_n\to A_0$. 由 A_n 的定义可知

$$\frac{1-\beta}{1-\alpha}\int_0^\eta\varphi_q\left(A_n-\int_0^s a(r)f(x_n(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\int_\eta^1\varphi_q\left(A_n-\int_0^s a(r)f(x_n(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s=0,$$

应用 Lebesgue 控制收敛定理知: 当 $n\to\infty$ 时, 有

$$\frac{1-\beta}{1-\alpha}\int_0^\eta\varphi_q\left(A_0-\int_0^s a(r)f(x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\int_\eta^1\varphi_q\left(A_0-\int_0^s a(r)f(x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s=0.$$

由 A_x 的唯一性可知 $A_x=A_0$, 即 A_x 关于 $x\in X$ 是连续的.

对 $\forall x\in X$, 定义

$$(Tx)(t)=\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^\eta\varphi_q\left(A_x-\int_0^s a(r)f(x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\int_0^t\varphi_q\left(A_x-\int_0^s a(r)f(x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s,$$

其中，A_x 是相应于 x 的由 (3) 式决定的常数．由 A_x 的唯一性可知 Tx 的定义是有意义的，且有下面结果.

引理 2.2 $T:X\to X$ 是全连续的.

证明 由 A_x 关于 x 的连续性易得 T 是连续的．关于 T 的紧性由 Arzela-Ascoli 定理可证.

引理 2.3 对任意的 $x\in P$, 有 $\min\limits_{t\in I}x(t)\geq k_0\|x\|$, 其中

$$k_0=\min\{\frac{\alpha\eta}{1-\alpha+\alpha\eta},\frac{\beta\eta}{1-\alpha+\alpha\eta},\frac{(1-\eta)\beta}{1-\eta\beta+\beta},\frac{(1-\eta)\alpha}{1-\eta\beta+\beta}\}<1.$$

证明 对任意的 $x(t)\in P$, 令 $x(t_0)=\|x\|$.

如果 $\eta\leq t_0$, 由 $x(t)$ 的凹性知 $\frac{x(0)-x(\eta)}{0-\eta}\geq\frac{x(t_0)-x(\eta)}{t_0-\eta}$, 又 $x(0)=\alpha x(\eta)$, 因此 $x(0)\geq\frac{\alpha\eta}{1-\alpha+\alpha\eta}x(t_0)$, 并且 $x(1)=\frac{\beta}{\alpha}x(0)\geq\frac{\beta\eta}{1-\alpha+\alpha\eta}x(t_0)$;

如果 $t_0<\eta$, 由 $x(t)$ 的凹性知 $\frac{x(t_0)-x(\eta)}{t_0-\eta}\geq\frac{x(1)-x(\eta)}{1-\eta}$, 又 $x(1)=\beta x(\eta)$, 因此 $x(1)\geq\frac{(1-\eta)\beta}{1-\eta\beta+\beta}x(t_0)$, 并且 $x(0)=\frac{\alpha}{\beta}x(1)\geq\frac{(1-\eta)\alpha}{1-\eta\beta+\beta}x(t_0)$.

综上由 $x(t)$ 的凹性知 $\min\limits_{t\in I}x(t)=\min\{x(0),x(1)\}\geq k_0\|x\|$.

本文的主要工具如下：

引理 2.4[10] 设 E 是一个 Banach 空间，$K\subset E$ 是一个锥，Ω_1 和 Ω_2 为 E 中满足 $0\in\Omega_1$, $\overline{\Omega_1}\subset\Omega_2$ 的有界开子集．设 $A:K\cap(\overline{\Omega_2}\setminus\Omega_1)\to K$ 是一个全连续算子，并且

(1) $\|Au\|\leq\|u\|$, $u\in K\cap\partial\Omega_1$, $\|Au\|\geq\|u\|$, $u\in K\cap\partial\Omega_2$; 或者

(2) $\|Au\|\geq\|u\|$, $u\in K\cap\partial\Omega_1$, $\|Au\|\leq\|u\|$, $u\in K\cap\partial\Omega_2$.

则 A 在 $K\cap(\overline{\Omega_2}\setminus\Omega_1)$ 中有一个不动点.

3 主要结果

对任意的 $x\in P$, 令 $\sigma_x\in\Sigma_x=\{\sigma\in(0,1)|A_x=\int_0^\sigma a(r)f(x(r))\mathrm{d}r\}$, 其中 A_x 是由 (3) 式决定的常数．则由 $(Tx)(t)$ 的定义知

$$(Tx)(t)=\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^\eta\varphi_q\left(\int_s^{\sigma_x}a(r)f(x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\int_0^t\varphi_q\left(\int_s^{\sigma_x}a(r)f(x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s$$

$$=\begin{cases}\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^\eta\varphi_q\left(\int_s^{\sigma_x}a(r)f(x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\int_0^t\varphi_q\left(\int_s^{\sigma_x}a(r)f(x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s, & \eta\leq t\leq\sigma_x \text{ 或 } t<\eta\leq\sigma_x;\\ \frac{\alpha}{1-\beta}\int_\eta^1\varphi_q\left(\int_{\sigma_x}^s a(r)f(x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\int_0^t\varphi_q\left(\int_s^{\sigma_x}a(r)f(x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s, & t\leq\sigma_x<\eta;\\ \frac{1}{1-\beta}\int_\eta^1\varphi_q\left(\int_{\sigma_x}^s a(r)f(x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\int_t^\eta\varphi_q\left(\int_{\sigma_x}^s a(r)f(x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s, & \sigma_x<t\leq\eta;\\ \frac{\alpha+\beta}{1-\beta}\int_\eta^t\varphi_q\left(\int_{\sigma_x}^s a(r)f(x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\frac{1+\alpha}{1-\beta}\int_t^1\varphi_q\left(\int_{\sigma_x}^s a(r)f(x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s, & \sigma_x<\eta<t;\\ \frac{\beta}{1-\alpha}\int_0^\eta\varphi_q\left(\int_s^{\sigma_x}a(r)f(x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\int_t^1\varphi_q\left(\int_{\sigma_x}^s a(r)f(x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s, & \eta\leq\sigma_x<t.\end{cases}$$

从 $(Tx)(t)$ 的分段表达式易见 $(Tx)(t)\geq0$ 且 $\|Tx\|=(Tx)(\sigma_x)$. 从 $(Tx)(t)$ 的定义知

$$\begin{cases}(\varphi_p((Tu)'(t)))'+a(t)f((Tu)(t))=0, & t\in(0,1),\\ (Tu)(0)=\alpha(Tu)(\eta),\ (Tu)(1)=\beta(Tu)(\eta),\end{cases}$$

从而 $(\varphi_p((Tu)'))' \le 0$, 即 $\varphi_p((Tu)')$ 不增, 也即 $(Tu)'$ 不增. 因此 (Tx) 是凹的. 从而 $T: P \to P$ 全连续.

令

$$f_0 = \underline{\lim}_{s\to 0}\frac{f(s)}{\varphi_p(s)}, \quad f^0 = \overline{\lim}_{s\to 0}\frac{f(s)}{\varphi_p(s)},$$

$$f_\infty = \underline{\lim}_{s\to \infty}\frac{f(s)}{\varphi_p(s)}, \quad f^\infty = \overline{\lim}_{s\to \infty}\frac{f(s)}{\varphi_p(s)},$$

$$M_1 = \max\{\frac{1-\alpha}{k_0\int_0^\eta \varphi_q\left(\int_s^\eta a(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s},\ \frac{1-\beta}{k_0\int_\eta^1 \varphi_q\left(\int_\eta^s a(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s}\},$$

$$M_2 = \frac{1}{\varphi_q\left(\int_0^1 a(s)ds\right)}\min\{\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)(1-\eta)+\beta\eta}, \frac{1-\beta}{\alpha(1-\eta)+\eta(1-\beta)}\}.$$

显然 $0 < M_2 < +\infty, M_1 > 0$. 如果 (H1) 成立，那么必有

$$\int_0^\eta \varphi_q\left(\int_s^\eta a(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s > 0 \text{ 和 } \int_\eta^1 \varphi_q\left(\int_\eta^s a(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s > 0,$$

因此 $0 < M_1 < +\infty$.

定理 3.1. 假设 (H1),(H2) 成立且 $f^0 \le \varphi_p(M_2)$, $f_\infty \ge \varphi_p(M_1)$. 则边值问题 (1)–(2) 至少存在一个正解 $u \in P$.

证明 由算子 T 的定义可知， T 在 P 中的不动点必为 (1)–(2) 的解.

首先，由 $f^0 \le \varphi_p(M_2)$ 知存在 $R_1 > 0$, 使得当 $|s| \le R_1$ 时， $\frac{f(s)}{\varphi_p(s)} \le \varphi_p(M_2)$. 令 $\Omega_1 = \{u \in X : \|u\| < R_1\}$, 则对任意的 $u \in P \cap \partial\Omega_1$, 有 $0 \le u(t) \le R_1$, 从而

$$f(u(t)) \le \varphi_p(M_2)\varphi_p(u(t)) \le \varphi_p(M_2)\varphi_p(R_1).$$

又

$$\|Tu\| = (Tu)(\sigma_u) = (Tu)(\sigma_u+) = (Tu)(\sigma_u-),$$

因此，如果 $\sigma_u \ge \eta$, 那么

$$\begin{aligned}
(Tu)(\sigma_u+) &= \frac{\beta}{1-\alpha}\int_0^\eta \varphi_q\left(\int_s^{\sigma_u} a(r)f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s + \int_{\sigma_u}^1 \varphi_q\left(\int_{\sigma_u}^s a(r)f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\\
&\le \frac{\beta}{1-\alpha}\int_0^\eta \varphi_q\left(\int_s^{\sigma_u} a(r)\varphi_p(M_2)\varphi_p(R_1)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s + \int_{\sigma_u}^1 \varphi_q\left(\int_{\sigma_u}^s a(r)\varphi_p(M_2)\varphi_p(R_1)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\\
&\le M_2R_1\left[\frac{\beta}{1-\alpha}\int_0^\eta \varphi_q\left(\int_0^1 a(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s + \int_\eta^1 \varphi_q\left(\int_0^1 a(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right]\\
&= R_1M_2\varphi_q(\int_0^1 a(s)\mathrm{d}s)\frac{\beta\eta+(1-\alpha)(1-\eta)}{1-\alpha}\\
&\le R_1 = \|u\|,
\end{aligned}$$

即 $\|Tu\| \le \|u\|$;
如果 $\sigma_u < \eta$, 那么

$$\begin{aligned}(Tu)(\sigma_u-) &= \frac{\alpha}{1-\beta}\int_\eta^1 \varphi_q\left(\int_{\sigma_u}^s a(r)f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s + \int_0^{\sigma_u}\varphi_q\left(\int_s^{\sigma_u} a(r)f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s \\ &\le \frac{\alpha}{1-\beta}\int_\eta^1 \varphi_q\left(\int_{\sigma_u}^s a(r)\varphi_p(M_2)\varphi_p(R_1)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s + \int_0^{\sigma_u}\varphi_q\left(\int_s^{\sigma_u} a(r)\varphi_p(M_2)\varphi_p(R_1)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s \\ &\le M_2R_1\frac{\alpha(1-\eta)+\eta(1-\beta)}{1-\beta}\varphi_q(\int_0^1 a(r)\mathrm{d}r) \\ &\le R_1 = \|u\|,\end{aligned}$$

即 $\|Tu\| \le \|u\|$.

从而对 $\forall u \in P\cap\partial\Omega_1$, 不管 $\sigma_u \ge \eta$ 还是 $\sigma_u < \eta$, 都有 $\|Tu\| \le \|u\|$.

其次，由 $f_\infty \ge \varphi_p(M_1)$ 知存在 $R > R_1 > 0$, 使得当 $|s| \ge R$ 时， $\frac{f(s)}{\varphi_p(s)} \ge \varphi_p(M_1)$, 即 $f(s) \ge \varphi_p(M_1)\varphi_p(s)$. 取 $R_2 = \frac{R}{k_0}(> R)$. 令 $\Omega_2 = \{u \in X : \|u\| < R_2\}$. 则对任意的 $u \in P\cap\partial\Omega_2$, 由引理 2.3 可知 $u(t) \ge k_0\|u\| = k_0\frac{R}{k_0} = R$, 因此 $f(u(t)) \ge \varphi_p(M_1)\varphi_p(u(t)) \ge \varphi_p(M_1)\varphi_p(R)$. 又

$$\|Tu\| = (Tu)(\sigma_u) = (Tu)(\sigma_u+) = (Tu)(\sigma_u-),$$

因此，如果 $\sigma_u \ge \eta$, 那么

$$\begin{aligned}(Tu)(\sigma_u-) &= \frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^\eta \varphi_q\left(\int_s^{\sigma_u} a(r)f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s + \int_0^{\sigma_u}\varphi_q\left(\int_s^{\sigma_u} a(r)f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s \\ &\ge \frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^\eta \varphi_q\left(\int_s^\eta a(r)f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s + \int_0^\eta\varphi_q\left(\int_s^\eta a(r)f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_0^\eta \varphi_q\left(\int_s^\eta a(r)f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s \\ &\ge \frac{1}{1-\alpha}\int_0^\eta \varphi_q\left(\int_s^\eta a(r)\varphi_p(M_1)\varphi_p(R)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{1-\alpha}M_1R_2k_0\int_0^\eta \varphi_q(\int_s^\eta a(r)\mathrm{d}r)\mathrm{d}s \\ &\ge R_2 = \|u\|,\end{aligned}$$

即 $\|Tu\| \ge \|u\|$;
如果 $\sigma_u < \eta$, 那么

$$\begin{aligned}Tu(\sigma_u+) &= \frac{1}{1-\beta}\int_\eta^1 \varphi_q\left(\int_{\sigma_u}^s a(r)f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s + \int_{\sigma_u}^\eta\varphi_q\left(\int_{\sigma_u}^s a(r)f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s \\ &\ge \frac{1}{1-\beta}\int_\eta^1 \varphi_q\left(\int_\eta^s a(r)f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s \\ &\ge \frac{1}{1-\beta}\int_\eta^1 \varphi_q\left(\int_\eta^s a(r)\varphi_p(M_1)\varphi_p(R)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s \\ &= M_1R_2k_0\frac{1}{1-\beta}\int_\eta^1 \varphi_q(\int_\eta^s a(r)\mathrm{d}r)\mathrm{d}s \\ &\ge R_2 = \|u\|,\end{aligned}$$

即 $\|Tu\| \geq \|u\|$.

从而对 $\forall u \in P \cap \partial\Omega_2$, 不管 $\sigma_u \geq \eta$ 还是 $\sigma_u < \eta$, 都有 $\|Tu\| \geq \|u\|$.

根据引理 2.4 的第一部分知, T 在 $K \cap (\overline{\Omega_R} \setminus \Omega_r)$ 中有不动点，也即三点边值问题 (1)–(2) 在 P 中有一个正解.

类似地，有

定理 3.2 假设 (H1),(H2) 成立且 $f^\infty \leq \varphi_p(M_2)$, $f_0 \geq \varphi_p(M_1)$. 则边值问题 (1)–(2) 至少存在一个正解 $u \in P$.

证明过程同定理 3.1, 略.

最后，举两个例子来说明本文的主要结果.

例 1 考虑下面的三点边值问题

$$\begin{cases} (\varphi_{\frac{3}{2}}(u'(t)))' + t^{-\frac{1}{2}} f(u(t)) = 0, \quad t \in (0,1), \\ u(0) = \frac{1}{2}u(\frac{1}{2}),\ u(1) = \frac{1}{4}u(\frac{1}{2}), \end{cases} \tag{4}$$

其中

$$f(u) = \begin{cases} 16u^{\frac{1}{2}}, & 0 \leq u \leq 1, \\ \frac{143}{8} - \frac{15}{8}x, & 1 \leq u \leq 9, \\ \frac{1}{3}u^{\frac{1}{2}}, & u \geq 9. \end{cases}$$

容易计算

$$k_0 = \min\{\frac{\alpha\eta}{1-\alpha+\alpha\eta}, \frac{\beta\eta}{1-\alpha+\alpha\eta}, \frac{(1-\eta)\beta}{1-\eta\beta+\beta}, \frac{(1-\eta)\alpha}{1-\eta\beta+\beta}\} = \frac{1}{9};$$

$$M_1 = \max\{\frac{1-\alpha}{k_0\int_0^\eta \varphi_p\left(\int_s^\eta a(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s}, \frac{1-\beta}{k_0\int_\eta^1 \varphi_q\left(\int_\eta^s a(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s}\} = \max\{\frac{54}{4}, \frac{81}{2(23-162^{\frac{1}{2}})}\} < 235;$$

$$M_2 = \frac{1}{\varphi_q(\int_0^1 a(s)\mathrm{d}s)} \min\{\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)(1-\eta)+\beta\eta}, \frac{1-\beta}{\alpha(1-\eta)+\eta(1-\beta)}\} = \frac{1}{4}\min\{\frac{4}{3}, \frac{6}{5}\} = \frac{3}{10}.$$

又

$$\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{\Phi_{\frac{3}{2}}(u)} = 16 = \Phi_{\frac{3}{2}}(256) > \Phi_{\frac{3}{2}}(235) > \Phi_{\frac{3}{2}}(M_1),$$

$$\lim_{u\to \infty}\frac{f(u)}{\Phi_{\frac{3}{2}}(u)} = \frac{1}{3} = \Phi_{\frac{3}{2}}(\frac{1}{9}) < \Phi_{\frac{3}{2}}(M_2).$$

根据定理 3.1, 边值问题 (4) 至少存在一个正解.

例 2 考虑下面的三点边值问题

$$\begin{cases} (\varphi_{\frac{3}{2}}(u'(t)))' + t^{-\frac{1}{2}} f(u(t)) = 0, \quad t \in (0,1), \\ u(0) = \frac{1}{2}u(\frac{1}{2}),\ u(1) = \frac{1}{4}u(\frac{1}{2}), \end{cases} \tag{5}$$

其中

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{3}u^{\frac{1}{2}}, & 0 \leq u \leq 1, \\ \frac{143}{24}x - \frac{45}{8}, & 1 \leq u \leq 9, \\ 16u^{\frac{1}{2}}, & u \geq 9. \end{cases}$$

同例 1 中 $k_0=\frac{1}{9}$; $M_1=\max\{\frac{54}{4},\ \frac{81}{2(23-162^{\frac{1}{2}})}\}<235$; $M_2=\frac{3}{10}$. 又

$$\lim_{u\to\infty}\frac{f(u)}{\Phi_{\frac{3}{2}}(u)}=16=\Phi_{\frac{3}{2}}(256)>\Phi_{\frac{3}{2}}(235)>\Phi_{\frac{3}{2}}(M_1),$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{\Phi_{\frac{3}{2}}(u)}=\frac{1}{3}=\Phi_{\frac{3}{2}}(\frac{1}{9})<\Phi_{\frac{3}{2}}(M_2).$$

根据定理 3.2, 边值问题 (5) 至少存在一个正解.

参考文献:

[1] GUPTA C P. *Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem for a second ordinary differential equation* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1992, **168**: 540–551.

[2] MA Ru-yun. *Positive solutions of a nonlinear three-point boundary-value problem* [J]. Electron. J. Differential Equations, 1999, **34**: 1–8.

[3] LIU Bing. *Positive solutions of a nonlinear three-point boundary value problem* [J]. Comput. Math. Appl., 2002, **44**: 201–211.

[4] MARANO S A. *A remark on a second order three-point boundary value problem* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1994, **157**: 518–522.

[5] LIU Bing. *Positive solutions of a nonlinear three-point boundary value problem* [J]. Appl. Math. Comput., 2002, **132**: 11–28.

[6] LIU Bing, YU Jian-she. *Positive solutions of a nonlinear three-point boundary value problem* [J]. Comput. Math. Appl., 2002, **44**: 201–211.

[7] 贺小明，葛渭高. 一维 P-Laplacian 方程正解的三解定理 [J]. 应用数学学报， 2003, **26**(3): 504–510.
HE Xiao-ming, GE Wei-gao. *A theorem about triple positive solutions for the one-dimensional p-Laplacian equations* [J]. Acta Math. Appl. Sin., 2003, **26**(3): 504–510. (in Chinese)

[8] WANG Jun-yu. *The existence of positive solutions for the one-dimensional p-Laplacian* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1997, **125**: 2275–2283.

[9] 孙伟平，葛渭高. 一类非线性边值问题正解的存在性 [J]. 数学学报， 2001, **44**(4): 577–580.
SUN Wei-ping, GE Wei-gao. *On the existence of positive solutions for a nonlinear system with p-Laplacian operator* [J]. Acta Math. Sinica, 2001, **44**(4): 577-580. (in Chinese)

[10] KRASNOSELSKII M A. *Positive Solutions of Operator Equations* [M]. Noordhoff, Gronigen, The Netherlands, 1964.

Existence of Positive Solutions for Three-Point Boundary Value Problem with p-Laplacian

MA De-xiang[1], *GE Wei-gao*[2]

(1. Department of Mathematics and Physics, North China Electric Power University (Beijing), Beijing 102206, China
2. Department of Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: By means of the Krasnoselskii's fixed-point theorem in cone, we study the existence of positive solution for the three-point boundary value problem with p-Laplacian operator

$$\begin{cases}(\varphi_p(u'(t)))'+a(t)f(u(t))=0, & t\in(0,1),\\ u(0)=\alpha u(\eta),\ u(1)=\beta u(\eta),\end{cases}$$

where $0<\alpha,\ \beta<1,\ 0<\eta<1$ and $\varphi_p(z)=|z|^{p-2}z,\ p>1$. Sufficient conditions are given which guarantee the existence of positive solutions of this problem.

Key words: p-Laplacian; three-point boundary value problem; cone; Krasnoselskii's fixed-point theorem.