

子群交换度对群结构的影响

徐 勇, 冯爱芬, 孙炎冰

(河南科技大学数学与统计学院, 河南 洛阳 471023)

摘 要: 本文研究了子群交换度与有限群结构的关系. 利用子群交换度的数量性质, 获得了循环群和 2^n 阶的广义四元数群的一个新刻画.

关键词: 有限群; 子群交换度; 循环群; 广义四元数群

MR(2010) 主题分类号: 20P05; 20D15

中图分类号: O152.1

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)03-0743-04

1 引言

本文所考虑的群均为有限群, 所有概念和符号均是标准的 (可参看文献 [1]). 在有限群的性质和结构的研究中, 算术结构是一个群的最基本的数学特征之一. 因此从群本身固有的数量信息来描述、刻画群的结构一直是群论研究的主流课题, 涉及群的各种问题和性质, 有着广泛的发展空间和应用背景.

近几年, 有限群概率方面的应用越来越受关注. 在研究中, 最重要的一个方面是有限群 G 的子群交换度与有限群结构之间的密切联系. 1979 年 D. J. Rusin 介绍了有限群 G 的交换度 [2] 的概念, 记 $d(G) = \frac{1}{|G|^2} |(x, y) \in G \times G | xy = yx|$, 并得到如果 $1 > d(G) > \frac{1}{2}$, 则 $d(G) \in \{\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{4^n}) | n \in N, n \geq 1\}$. 之后, P. Lescot 又做了进一步的研究 [3,4], 得到一些有趣的结果. 最近, M. Tărnăuceanu 于 2009 年介绍了子群的交换度 [5] 的概念, 记 $sd(G) = \frac{1}{|L(G)|^2} |\{(H, K) \in L(G)^2 | HK \in L(G)\}|$, 并讨论其对群结构的影响, 得到了一些有意义的结论. 本文将继续讨论这一问题.

接下来, 我们给出几个在文中用到的记号 (见文 [5]). $L(G)$ 表示群 G 的子群格; $\pi(G)$ 表示 G 的阶的素因子; $|\pi(G)|$ 表示 G 的阶的素因子的个数. 对于群 G 的任一子群 H , 群 G 中所有与 H 可交换的子群的集合记为 $C(H)$, 即 $C(H) = \{K \in L(G) | HK = KH\}$. 从而 $sd(G) = \frac{1}{|L(G)|^2} \sum_{H \in L(G)} |C(H)|$. 为计算方便, 定义函数 $f: L(G)^2 \rightarrow \{0, 1\}$

$$f(H, K) = \begin{cases} 1, & HK = KH, \\ 0, & HK \neq KH, \end{cases} \quad \forall H, K \in L(G).$$

易知对 $\forall H \in L(G)$, $|C(H)| = \sum_{K \in L(G)} f(H, K)$. 于是 $sd(G) = \frac{1}{|L(G)|^2} \sum_{H, K \in L(G)} f(H, K)$.

2 引理

*收稿日期: 2013-09-14

接收日期: 2014-02-18

基金项目: 国家自然科学基金 (11326056; 11171243; 11301151); 河南科技大学博士启动基金资助 (09001610); 河南科技大学青年科学基金 (13000954).

作者简介: 徐勇 (1981-), 男, 河南信阳, 讲师, 主要研究方向: 有限群论.

引理 2.1^[5] 设 G 是有限群, N 是 G 的一个正规子群, 则

$$sd(G) \geq \frac{1}{|L(G)|^2} [(|L(N)| + |L(G/N)| - 1)^2 + (sd(N) - 1)|L(N)|^2 + (sd(G/N) - 1)|L(G/N)|^2].$$

引理 2.2^[6] 设 G 是有限群, $|G| = p^n$, 若 $s_1(G) = 1$, 其中 $s_1(G)$ 为群 G 中 p 阶子群的个数. 则

- (1) 对 $p > 2$, G 是循环群.
- (2) 对 $p = 2$, G 是循环群或广义四元数群.

引理 2.3^[6] 设 G 是有限群, $|G| = p^n$, $1 < m < n$, 若 $s_m(G) = 1$, 其中 $s_m(G)$ 为群 G 中 p^m 阶子群的个数, 则 G 为循环群.

3 主要结论

定理 3.1 设 G 是有限群, N 是 G 的非平凡正规子群, 则

$$sd(G) = \frac{1}{|L(G)|^2} [(|L(N)| + |L(G/N)| - 1)^2 + (sd(N) - 1)|L(N)|^2 + (sd(G/N) - 1)|L(G/N)|^2]$$

的充分必要条件是 G 是 p^n 阶群, 其中 p 为素数, $n \geq 2$ 为整数且当 $p > 2$, G 是循环群; 当 $p = 2$, G 是循环群或广义四元数群.

证 “ $\Rightarrow$ ” 设 $A_1 = \{H \in L(G) | N \subseteq H\}$, $A_2 = \{H \in L(G) | H \subset N\}$. 则易计算

$$\begin{aligned} \sum_{H, K \in A_1} f(H, K) &= sd(G/N)|L(G/N)|^2, \\ \sum_{H, K \in A_2} f(H, K) &= \sum_{H, K \in A_2 \cup \{N\}} f(H, K) - 2 \sum_{H \in A_2 \cup \{N\}} f(H, N) + 1 \\ &= sd(N)|L(N)|^2 - 2|L(N)| + 1, \\ 2 \sum_{H \in A_1} \sum_{K \in A_2} f(H, K) &= 2|A_1||A_2| = 2|L(G/N)|(|L(N)| - 1), \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|L(G)|^2} \sum_{H, K \in A_1 \cup A_2} f(H, K) \\ &= \frac{1}{|L(G)|^2} \left(\sum_{H, K \in A_1} f(H, K) + \sum_{H, K \in A_2} f(H, K) + 2 \sum_{H \in A_1} \sum_{K \in A_2} f(H, K) \right) \\ &= \frac{1}{|L(G)|^2} [(|L(N)| + |L(G/N)| - 1)^2 + (sd(N) - 1)|L(N)|^2 + (sd(G/N) - 1)|L(G/N)|^2]. \end{aligned}$$

又由题设条件知

$$\begin{aligned} sd(G) &= \frac{1}{|L(G)|^2} \sum_{H, K \in L(G)} f(H, K) \\ &= \frac{1}{|L(G)|^2} [(|L(N)| + |L(G/N)| - 1)^2 + (sd(N) - 1)|L(N)|^2 + (sd(G/N) - 1)|L(G/N)|^2], \end{aligned}$$

从而 $A_1 \cup A_2 = L(G)$. 于是对 G 的任意子群 H , 有 $N \leq H$ 或者 $H < N$.

下面分三步来证明定理的必要性.

(1) $\pi(N) = \pi(G)$.

假设 $\pi(N) \neq \pi(G)$, 则 $\pi(N) \subset \pi(G)$, 于是存在素数 p_m , 使得 $p_m \in \pi(G)$, 而 $p_m \notin \pi(N)$. 令 H 为 G 的 Sylow p_m -子群, 则 $|H|$ 不整除 $|N|$, 且 $|N|$ 不整除 $|H|$. 从而 $N \not\leq H$ 且 $H \not\leq N$, 矛盾. 故假设不成立. 因此 (1) 成立.

(2) $|\pi(G)| = 1$.

假设 $\pi(G) \neq 1$. 令 $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$, 其中 p_i 是素数, α_i 是正整数 ($i = 1, 2, \dots, t$), 则 $t > 1$. 由 (1) 知, $|N| = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_t^{\beta_t}$, 其中 $1 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ 且 $t > 1$. 因为 N 是 G 的非平凡正规子群, 从而 $|G| > |N|$, 于是存在 $j \in \{1, 2, \dots, t\}$, 使得 $\alpha_j > \beta_j$. 令 H 为 G 的 Sylow p_j -子群, 则 $|H| = p_j^{\alpha_j}$. 若 $H < N$, 则 $|H|$ 整除 $|N|$, 于是 $\alpha_j \leq \beta_j$, 矛盾. 若 $N \leq H$, 则 $|N|$ 整除 $|H|$, 故 $|\pi(N)| \leq |\pi(H)| = 1$, 从而 $|\pi(N)| = 1$, 即 $t = 1$, 矛盾. 所以 $|\pi(G)| = 1$.

(3) 必要性的证明.

由 (2) 可设 $|G| = p^n$, 其中 p 为素数, n 为自然数. 由于 N 是 G 的非平凡正规子群, 则 $n \geq 2$. 现在令 $|N| = p^\alpha$, 其中 α 为正整数, $1 \leq \alpha < n$. 假设 H 是 G 的任意 p^α 阶子群, 则 $|N| = |H|$. 因为 $N \leq H$ 或者 $H < N$, 所以 $H = N$. 故群 G 的 p^α 阶子群只有一个, 即 $s_\alpha(G) = 1$. 由引理 2 和引理 3 知, G 是 p^n 阶群, 其中 p 为素数, $n \geq 2$ 为整数且当 $p > 2$, G 是循环群; 当 $p = 2$, G 是循环群或广义四元数群.

“ $\Leftarrow$ ” 当 G 是 p^n 阶的循环群, 其中 p 为素数, $n \geq 2$ 的整数, 易知 $sd(G) = sd(N) = sd(G/N) = 1$, $|L(N)| = \log_p^{|N|} + 1$ 且 $|L(G/N)| = \log_p^{|G/N|} + 1$. 当 G 是 2^n 阶的广义四元数群时, 取 $N = Z(G)$, 则同样有

$$sd(G) = sd(N) = sd(G/N) = 1, |L(N)| = \log_p^{|N|} + 1$$

且 $|L(G/N)| = \log_p^{|G/N|} + 1$, 代入可得

$$sd(G) = \frac{1}{|L(G)|^2} [(|L(N)| + |L(G/N)| - 1)^2 + (sd(N) - 1)|L(N)|^2 + (sd(G/N) - 1)|L(G/N)|^2].$$

综上, 定理得证.

注 特别地, 当 N 是 G 的平凡正规子群时, 等式

$$sd(G) = \frac{1}{|L(G)|^2} [(|L(N)| + |L(G/N)| - 1)^2 + (sd(N) - 1)|L(N)|^2 + (sd(G/N) - 1)|L(G/N)|^2]$$

恒成立.

由定理 3.1 及注, 易得推论 3.2 及推论 3.3.

推论 3.2 若群 G 不是循环 p -群及 2^n 阶的广义四元数群, N 是 G 的非平凡正规子群, 那么

$$sd(G) > \frac{1}{|L(G)|^2} [(|L(N)| + |L(G/N)| - 1)^2 + (sd(N) - 1)|L(N)|^2 + (sd(G/N) - 1)|L(G/N)|^2].$$

推论 3.3 设 G 为有限群. 则对 G 的任意正规子群 N ,

$$sd(G) = \frac{1}{|L(G)|^2} [(|L(N)| + |L(G/N)| - 1)^2 + (sd(N) - 1)|L(N)|^2 + (sd(G/N) - 1)|L(G/N)|^2]$$

都成立的充分必要条件是 G 或者是单群或者是 p^n 阶的循环群或者是 2^n 阶的广义四元数群, 其中 p 为素数, $n \geq 2$ 为整数.

推论 3.4 设 G 是 p^k 阶群, 且 G 有循环的极大子群. 若 $sd(G) = (\frac{k+1}{|L(G)|})^2$, $k \geq 1$, 则 G 是循环 p -群或者是 2^n 阶的广义四元数群.

证 $k = 1$ 时, 显然 G 是循环 p -群. 不妨设 $k > 1$, N 是 G 的循环的极大子群, 则 $|N| = p^{k-1}$ 且 G/N 是 p 阶循环群. 所以 $L(N) = k$, $L(G/N) = 2$, $sd(N) = 1$, $sd(G/N) = 1$. 从而由题设条件知

$$\begin{aligned} sd(G) &= \left(\frac{k+1}{|L(G)|}\right)^2 \\ &= \frac{1}{|L(G)|^2} [(|L(N)| + |L(G/N)| - 1)^2 + (sd(N) - 1)|L(N)|^2 + (sd(G/N) - 1)|L(G/N)|^2]. \end{aligned}$$

根据定理 3.1 的必要性知 G 是循环 p -群或者是 2^n 阶的广义四元数群.

参 考 文 献

- [1] Huppert B. Endliche gruppen I[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1967.
- [2] Rusin D J. What is the probability that two elements of a finite group commute? [J]. Pacific J. Math., 1979, 82: 237–247.
- [3] Lescot P. Sur certains groupes finis[J]. Rev. Math. Spéciales, 1987, 8: 276–277.
- [4] Lescot P. Degré de commutativité structure d'un groupe fini (1) [J]. Rev. Math. Spéciales, 1988, 8: 276–279.
- [5] Tărnăuceanu M. Subgroup commutativity degrees of finite groups[J]. J. Algebra, 2009, 321(9): 2508–2520.
- [6] 徐明耀. 有限群导引 (上册) [M]. 北京: 科学出版社, 1999.

THE INFLUENCE OF SUBGROUP COMMUTATIVITY DEGREES ON THE STRUCTURE OF FINITE GROUPS

XU Yong, FENG Ai-fen, SUN Yan-bing

(School of Mathematics and Statistics, Henan University of Science and Technology,
Luoyang 471023, China)

Abstract: In this paper, we study the relationship between the structure of finite groups and subgroup commutativity degrees. And we obtain a new characterization of the cyclic groups and generalized quaternion groups of order 2^n by using properties of quantities of subgroup commutativity degrees.

Keywords: finite group; subgroup commutativity degree; cyclic group; generalized quaternion group

2010 MR Subject Classification: 20P05; 20D15