Vol. 35 (2015)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一般状态空间跳过程的不可约性

张水利 [1,2], 屈 聪 [1]

(1. 平顶山学院数学与信息科学学院, 河南 平顶山 467000)
(2. 湖北大学数学与计算机科学学院, 湖北 武汉 430062)

摘 要: 本文研究了一般状态空间跳过程的 φ - 不可约性. 利用与马氏链类似的方法, 得到了最大不可约测度及其性质, 推广了离散时间一般状态空间马氏链的结果, 作为应用, 给出了 $C\in\mathcal{E}^+$ 的充分条件. 最后, 证明了跳过程、骨架链、跳跃链和预解链的 φ - 不可约是等价的.

关键词: 跳过程; φ - 不可约; q 对

MR(2010) **主题分类号**: 60J75; 60G07　　　　**中图分类号**: O211.62

文献标识码: A　　　　**文章编号**: 0255-7797(2015)03-0656-09

1 引言与主要结果

设 $(E,\mathcal{E})$ 是波兰空间, $\mathcal{E}$ 是 E 上的 Borel σ 代数. 令 $R_+:=[0,\infty), Z_+:=\{0,1,2,\cdots\}$, 如果没有特别说明, 本文总是设 q 对 $(q(x),q(x,A))$ 是正则的 (全稳、保守且 q 过程唯一), 且 $q(x)>0$, 所对应的跳过程 $X=\{X_t:t\in R_+\}$ 是完全可分、轨道右连续且具有强马氏性, 转移概率函数为 $\{P(t,x,A):t\in R_+,x\in E,A\in\mathcal{E}\}$ (相应半群是 $\{P^t\}$). 我们对具有相同转移概率函数的跳过程不加区分, 所以也称 $P(t,x,A)$ 是跳过程.

设 $P=\{P_{ij}:i,j\in G\}$ 是可数集 G 上的转移阵, $\{Y_n:n\in Z_+\}$ 是以 P 为转移概率的马氏链, 若 $\forall i,j\in G$, 有 $i\leftrightarrow j$ (即存在 $n>0,m>0$ 满足 $P_{ij}^n>0,P_{ji}^m>0$), 则称马氏链 $\{Y_n:n\in Z_+\}$ 是不可约的. 对于不可约马氏链 $\{Y_n:n\in Z_+\}$, 从任一个状态 i 出发经过有限时间能够到达任一个状态 j. 设 $\{X_n:n\in Z_+\}$ 是一般状态空间 $(E,\mathcal{E})$ 上的马氏链, $\forall A\in\mathcal{E}$, 令 $\gamma_A:=\inf\{n\geq 1,X_n\in A\}$. 对于一般状态空间马氏链, 不能定义与"$\leftrightarrow$"类似的概念, 因此在文 [1] 中, 给出了一般状态空间马氏链 φ - 不可约性的定义 (即存在 $\mathcal{E}$ 上的 σ - 有限测度 φ, 当 $\varphi(A)>0$ 时, 对 $\forall x\in E$, 有 $P_x(\gamma_A<\infty)>0$). 一般状态空间马氏链的不可约性, 从直观上讲就是, 任一个状态到达"比较大的集合"的概率都是正的.

设 ν_G 是可数集 G 上的计数测度, 则 G 上的不可约马氏链 $\{Y_n:n\in Z_+\}$ 是 ν_G - 不可约的. 事实上, 对任意的非空子集 $B\subset G$, 都有 $\nu_G(B)>0$, 由可数状态空间马氏链不可约的定义可知, 对 $\forall i\in G$, 都有 $P_i(\gamma_B<\infty)>0$.

本文主要研究一般状态空间跳过程的 φ - 不可约性, 得到与离散时间一般状态空间马氏链类似的结果. 我们先给出一些记号, 令 $J_0:\equiv 0$,

$$J_n:=\inf\{t>J_{n-1},X_t\neq X_{J_{n-1}}\},\quad n\geq 1,$$

*收稿日期: 2013-06-20　　　接收日期: 2013-11-19

作者简介: 张水利 (1982–), 男, 河南驻马店, 讲师, 研究方向: 随机过程.

J_n 表示跳过程 $X=\{X_t: t\in R_+\}$ 第 n 次跳跃时刻. 对任一个可测集 A, 令

$$\sigma_A := \inf\{t\geq 0, X_t\in A\},\ \ \tau_A := \inf\{t\geq J_1, X_t\in A\},\ \ \eta_A := \int_0^\infty I_{\{X_t\in A\}}dt.$$

定义 1.1 称跳过程 $X=\{X_t, t\in R_+\}$ 是 φ - 不可约的, 若存在 $\mathcal{E}$ 上的 σ - 有限测度 φ, 满足当 $\varphi(A)>0$ 时, 有 $P_x(\tau_A<\infty)>0,\ \forall x\in E$.

本文的主要结果是

定理 1.2 设跳过程 $X=\{X_t: t\in R_+\}$ 是 ν - 不可约的, 令

$$\psi(A) := \int_E \nu(dx)\int_0^\infty P(t,x,A)e^{-t}dt, \tag{1.1}$$

则

(1) 跳过程 $X=\{X_t: t\in R_+\}$ 是 ψ - 不可约的.

(2) 对任意其它测度 φ, 跳过程 $X=\{X_t: t\in R_+\}$ 是 φ - 不可约的 $\Leftrightarrow \varphi\ll\psi$ (φ 关于 ψ 绝对连续).

(3) 若 $\psi(A)=0$, 则 $\psi\{x\in E: P_x(\tau_A<\infty)>0\}=0$.

注 1.3 不妨假设 ν 是概率测度, 则上面定义的 ψ 也是概率测度. 满足定理 1.2 中条件 (1) 和 (2) 的概率测度称为最大不可约测度. 以后我们假设 ψ 是最大不可约概率测度, 跳过程 $X=\{X_t: t\in R_+\}$ 是 ψ - 不可约的. 从条件 (2) 可知, 最大不可约概率测度是等价的. 令 $\mathcal{E}^+ := \{A\in\mathcal{E}: \psi(A)>0\}$, 则 $\mathcal{E}^+$ 是唯一的.

定理 1.4 若集合 $C\in\mathcal{E}$ 且 $\sup\limits_{x\in C} E_x[\tau_C]<\infty$, 则 $C\in\mathcal{E}^+$.

注 1.5 离散时间马氏链也有类似的结论, 见文献 [1] 的命题 4.2.2 和命题 8.3.1.

2 预备知识

我们首先给出一些定义和记号, 定义 σ - 代数流 $\mathcal{F}_t := \sigma(X_s, s\leq t), t\geq 0, \mathcal{F}_\infty := \sigma(X_s, s\geq 0)$, 设 τ 是相对于 $\{\mathcal{F}_t\}$ 的停时, τ 以前的 σ - 代数定义为 $\mathcal{F}_\tau := \{\Lambda\in\mathcal{F}_\infty: \Lambda\cap\{\omega: \tau(\omega)\leq t\}\in\mathcal{F}_t, \forall t\in R_+\}$. 用 ${}_r\mathcal{E}_+$ 表示 E 上的非负实值 $\mathcal{E}$ - 可测函数的集合, $\mathcal{L}_+$ 和 $\overline{\mathcal{L}}_+$ 分别表示 $\mathcal{E}$ 上的有限和 σ - 有限测度的集合. $\forall f\in {}_r\mathcal{E}_+$ 及 $\mu\in\overline{\mathcal{L}}_+$,

$$P^t f(x) := \int_E P(t,x,dy)f(y),\ \ \mu P^t(A) := \int_E \mu(dx)P(t,x,A),\ \ x\in E, A\in\mathcal{E}.$$

定义 2.1 [2] 称 $\{P(t,x,A): t\in R_+, x\in E, A\in\mathcal{E}\}$ 是跳过程的转移函数, 若下面的条件成立

(1) $\forall t\in R_+, A\in\mathcal{E}$, $P(t,\cdot,A)\in {}_r\mathcal{E}_+$;

(2) $\forall t\in R_+, x\in E$, $P(t,x,\cdot)\in\mathcal{L}_+$, 且 $P(t,x,E)\leq 1$;

(3) ($C-K$方程) $\forall t,s\in R_+, x\in E, A\in\mathcal{E}$, 有

$$P(t+s,x,A) = \int_E P(t,x,dy)P(s,y,A);$$

(4) (连续性条件) $\forall x\in E, A\in\mathcal{E}$, 有

$$\lim_{t\to 0} P(t,x,A) = P(0,x,A) = \delta(x,A),$$

其中 $\delta(x,A)$ 表示集合 A 的示性函数, 也记为 $I_A(x)$.

引理 2.2 [2] 令 $\mathcal{R} :=\{A\in\mathcal{E}: \lim\limits_{t\to 0}\sup\limits_{x\in A}[1-P(t,x,\{x\})]=0\}$, 则有

(1) $\forall x\in E$, 极限

$$q(x) := \lim_{t\to 0}\frac{1-P(t,x,\{x\})}{t} = \sup_{t>0}\frac{1-P(t,x,\{x\})}{t}$$

存在且 $q(\cdot)\in {}_r\mathcal{E}_+$.

(2) $\forall x\notin A\in\mathcal{R}$, 极限

$$q(x,A) := \lim_{t\to 0}\frac{P(t,x,A)}{t}$$

存在, 且 $q(x,A)\le q(x)$.

(3) 定义 $q(x,A)=q(x,A\backslash\{x\}), x\in E, A\in\mathcal{R}$, 则对每个 $x, q(x,\cdot)$ 是 $\mathcal{R}$ 上的有限测度, 且对每个 $A\in\mathcal{R}$, $q(\cdot,A)\in {}_r\mathcal{E}_+$.

引理 2.3 [2] 假设存在 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{R}$, 满足 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n=E$, 则对每个 $x\in E, q(x,\cdot)$ 能够唯一延拓到 $\mathcal{E}$, 而且对每个 $A\in\mathcal{E}$, $q(\cdot,A)\in {}_r\mathcal{E}_+$.

由引理 2.2 和引理 2.3, 我们引入下面的定义.

定义 2.4 [2] 称 $(q(x),q(x,A))(x\in E, A\in\mathcal{E})$ 是一个 q 对, 若

(1) $\forall x\in E$, $q(x,\cdot)$ 是 $\mathcal{E}$ 上的一个测度, $q(x,\{x\})=0, q(x,E)\le q(x)$;

(2) $\forall A\in\mathcal{E}$, $q(\cdot)$ 和 $q(\cdot,A)$ 是 $\mathcal{E}$ - 可测函数.

若 $\forall x\in E$, 都有$q(x)<\infty$, 则称 q 对是全稳的. 若 $\forall x\in E$, 都有$q(x)=q(x,E)$, 则称 q 对是保守的.

定义 2.5 [2] 称跳过程 $\{P(t,x,A): t\in R_+, x\in E, A\in\mathcal{E}\}$ 是带有 q 对 $(q(x),q(x,A))$ 的 q 过程, 若 $\forall x\in E, A\in\mathcal{R}$, 有

$$\lim_{t\to 0}\frac{P(t,x,A)-\delta(x,A)}{t} = q(x,A)-q(x)\delta(x,A).$$

引理 2.6 [2] 对于一个给定的 q 对, 则向后方程

$$P(t,x,A)=\int_0^t e^{-q(x)(t-s)}\int q(x,dy)P(s,y,A)ds+\delta(x,A)e^{-q(x)t}$$

的最小解 $P^{\min}(t,x,A)$ 是一个 q 过程, 而且对任意的 q 过程 $P(t,x,A)$, 都有

$$P(t,x,A)\ge P^{\min}(t,x,A),\ \ t\ge 0, x\in E, A\in\mathcal{E}.$$

引理 2.7 [2] 设 $P(t,x,A)$ 是 $(E,\mathcal{E})$ 上的跳过程, 则 $\forall x\in E, A\in\mathcal{E}$, 有 $P(\cdot,x,A)=0$ 或者 $P(\cdot,x,A)>0$.

记

$$\Pi(x,dy) := \frac{q(x,dy)}{q(x)},$$

则 $\Pi(x,dy)$ 是一个概率核, 它确定的离散时间马氏链称为嵌入过程 (或跳跃链). 令

$$\Pi^0=I,\ \Pi^{n+1}=\Pi\Pi^n.$$

引理 2.8 [2] 设 $(q(x), q(x,A))$ 是保守 q 对, 则

$$\int_0^\infty P^{\min}(t,x,A)dt = \sum_{n=0}^\infty \int_A \Pi^n(x,dy)\frac{1}{q(y)},\ \ x\in E, A\in\mathcal{E},$$

其中 $P^{\min}(t,x,A)$ 是 $(q(x), q(x,A))$ 确定的最小 q 过程.

定义 2.9 称集合 $A\in\mathcal{E}$ 是跳过程 $X=\{X_t: t\in R_+\}$ 的吸收集, 若 $\forall x\in A$, 都有 $P(t,x,A)=1,\ \forall t\in R_+$.

引理 2.10 若集合 A 是跳跃链的吸收集, 则 A 也是跳过程的吸收集.

证 设集合 A 是跳跃链的吸收集, 则 $\forall x\in A$, 有 $\Pi(x,A)=\frac{q(x,A)}{q(x)}=1$. 由 q 对是保守的, 所以 $\Pi(x,A^c)=\frac{q(x,A^c)}{q(x)}=0$. 对 $\forall x\in A$, 有

$$\begin{aligned}
&\int_{A^c}\Pi^0(x,dy)\frac{1}{q(y)}=0,\ \int_{A^c}\Pi(x,dy)\frac{1}{q(y)}=0,\\
&\int_{A^c}\Pi^2(x,dy)\frac{1}{q(y)}=\int_{A^c}\int_E \Pi(x,dz)\Pi(z,dy)\frac{1}{q(y)}=\int_{A^c}\int_A \Pi(x,dz)\Pi(z,dy)\frac{1}{q(y)}\\
=\ &\int_A \Pi(x,dz)\int_{A^c}\Pi(z,dy)\frac{1}{q(y)}=0.
\end{aligned}$$

可以归纳地证明, $\forall x\in A,\ n\in Z_+$, 都有

$$\int_{A^c}\Pi^n(x,dy)\frac{1}{q(y)}=0.$$

由引理 2.8, $\forall x\in A$, 有

$$\int_0^\infty P(t,x,A^c)dt=\sum_{n=0}^\infty\int_{A^c}\Pi^n(x,dy)\frac{1}{q(y)}=0.$$

由引理 2.7, $\forall x\in A$, 有 $P(t,x,A^c)=0, \forall t\in R_+$, 即 $P(t,x,A)=1, \forall t\in R_+$, 所以 A 是跳过程 $\{X_t: t\in R_+\}$ 的吸收集. 引理证毕.

引理 2.11 [1] 下列条件等价:

(1) 马氏链 $\{X_n, n\in Z_+\}$ 是 φ - 不可约的.

(2) 当 $\varphi(A)>0$ 时, $\forall x\in E$, $\sum\limits_{n=1}^\infty P^n(x,A)>0$.

(3) 当 $\varphi(A)>0$ 时, $\forall x\in E$, $\exists n$, 使得 $P^n(x,A)>0$.

(4) 当 $\varphi(A)>0$ 时, $\forall x\in E$, $\sum\limits_{n=0}^\infty P^n(x,A)2^{-(n+1)}>0$.

引理 2.12 对于正则 q 对确定的跳过程 $X=\{X_t, t\in R_+\}$, 下列条件等价:

(1) 跳过程 $X=\{X_t, t\in R_+\}$ 是 φ - 不可约的.

(2) 当 $\varphi(A)>0$ 时, $\forall x\in E, \exists$ (等价地, $\forall$) $t>0$, 有 $P(t,x,A)>0$.

(3) 当 $\varphi(A)>0$ 时, $\forall x\in E$, 有

$$E_x[\eta_A]=E_x[\int_0^\infty I_{\{X_t\in A\}}dt]=\int_0^\infty P(t,x,A)dt>0.$$

(4) 当 $\varphi(A)>0$ 时, $\forall x\in E$, 有

$$\int_0^\infty P(t,x,A)e^{-t}dt>0.$$

证 类似于文 [1] 中的命题 4.2.1 可证.

3 主要结果的证明

定理 1.2 的证明 (1) 设 $\psi(A)>0$, 分两种情况进行讨论.

若 $\nu(A)>0$, 由 $\{X_t:t\in R_+\}$ 是 ν - 不可约的, 有

$$E_x[\eta_A]>0,\ \forall x\in E. \tag{3.1}$$

若 $\nu(A)=0$, 令 $B:=\{x\in E:E_x[\eta_A]>0\}$. 此时

$$\psi(A)=\int_{A^c}\nu(dx)\int_0^\infty P(t,x,A)e^{-t}dt>0.$$

等价地有

$$\int_{A^c}\nu(dx)\int_0^\infty P(t,x,A)dt=\int_{A^c}\nu(dx)E_x[\eta_A]>0.$$

所以 $\nu(B)>0$. 由 $\{X_t:t\in R_+\}$ 是 ν - 不可约的, 则 $\forall x\in E$, 都有$E_x[\eta_B]>0$, 所以存在 $t>0$, 使得 $P(t,x,B)>0$.

由 C-K 方程, $\forall x\in E$, 有

$$\begin{aligned}E_x[\eta_A]&=\int_0^\infty P(s,x,A)ds\ge\int_0^\infty P(s+t,x,A)ds\ge\int_0^\infty\int_B P(t,x,dy)P(s,y,A)ds\\ &\ge\int_B P(t,x,dy)\int_0^\infty P(s,y,A)ds=\int_B P(t,x,dy)E_y[\eta_A]>0.\end{aligned} \tag{3.2}$$

由 (3.1), (3.2) 式可知, 跳过程 $\{X_t:t\in R_+\}$ 是 ψ - 不可约的.

(2) $\Leftarrow$ 设 $\varphi(A)>0$, 由 $\varphi\ll\psi$, 则 $\psi(A)>0$. 由 $\{X_t:t\in R_+\}$ 是 ψ - 不可约的, 所以对 $\forall x\in E$, 有 $E_x[\eta_A]>0$. 因此 $\{X_t:t\in R_+\}$ 是 φ - 不可约的.

$\Rightarrow$ 设 $\{X_t:t\in R_+\}$ 是 φ - 不可约的. 若 $\varphi(A)>0$, 则 $\forall x\in E$, 有 $E_x[\eta_A]>0$, 即 $\int_0^\infty P(t,x,A)dt>0$. 等价地有

$$\int_0^\infty P(t,x,A)e^{-t}dt>0,\ \forall x\in E.$$

由 $\nu(E)>0$, 所以

$$\psi(A)=\int_E\nu(dx)\int_0^\infty P(t,x,A)e^{-t}dt>0.$$

因此 $\varphi\ll\psi$.

(3) 令 $D := \{x \in E : P_x(\tau_A < \infty) > 0\}$, 用反证法, 假设 $\psi(D) > 0$. 由 C-K 方程及 $\psi(A) = 0$, $\forall t \geq 0$, 有

$$\begin{aligned}&\int_E \psi(dy) P(t,y,A)e^{-t} = \int_E \int_E \nu(dx) \int_0^\infty P(s,x,dy)e^{-s} ds P(t,y,A)e^{-t}\\ = &\int_E \nu(dx) \int_0^\infty P(s+t,x,A)e^{-(s+t)} ds = \int_E \nu(dx) \int_t^\infty P(u,x,A)e^{-u} du\\ \leq &\int_E \nu(dx) \int_0^\infty P(u,x,A)e^{-u} du = \psi(A) = 0.\end{aligned}$$

所以

$$\int_E \psi(dy) \int_0^\infty P(t,y,A)e^{-t} dt = 0.$$

等价地有

$$E_y[\eta_A] = \int_0^\infty P(t,y,A)dt = 0 \ \text{ a.s. } \ y[\psi].$$

令 $N := \{y \in E : E_y[\eta_A] > 0\}$, 则 $\psi(N) = 0$. 当 $y \in A^c$ 时, 若 $E_y[\eta_A] = 0$, 则有 $P_y(\tau_A < \infty) = 0$. 由 $\psi(D) > 0, \psi(N^c) = 1, \psi(A^c) = 1$ 可知 $\psi(D \cap N^c \cap A^c) > 0$. 取 $y \in D \cap N^c \cap A^c$, 由上面的讨论可知, 有 $P_y(\tau_A < \infty) > 0$ 和 $P_y(\tau_A < \infty) = 0$ 同时成立, 这是矛盾的. 所以 $\psi(D) = \psi\{x \in E : P_x(\tau_A < \infty) > 0\} = 0$. 定理证毕.

为了证明定理 1.4, 我们给出下面的定义及命题.

定义 3.1 称集合 $A \in \mathcal{E}$ 是跳过程 $X = \{X_t : t \in R_+\}$ 的满集, 若 $\psi(A^c) = 0$.

命题 3.2 设跳过程 $X = \{X_t : t \in R_+\}$ 是 ψ - 不可约的, 则

(1) 每一个吸收集是满集;

(2) 每个满集包含一个满的吸收子集.

证 (1) 设 A 是跳过程 $X = \{X_t : t \in R_+\}$ 的吸收集, 则 $P(t,x,A^c) = 0, \ \forall t \in R_+, x \in A$. 反证法, 若 $\psi(A^c) > 0$, 由 $X = \{X_t : t \in R_+\}$ 是 ψ - 不可约的, 以及引理 2.12 可知

$$P(t,x,A^c) > 0, \ \ \forall t > 0, x \in E.$$

这与 $P(t,x,A^c) = 0$, $\forall t \in R_+, x \in A$, 矛盾. 因此 $\psi(A^c) = 0$, 即 A 是满集.

(2) 设 A 是 $X = \{X_t : t \in R_+\}$ 的满集, 则 $\psi(A^c) = 0$. 令

$$B := \{y \in E : \int_0^\infty P(t,y,A^c)dt = 0\}.$$

则 $B \subset A$ (这是因为若 $y \in A^c$, 则 $P(0,y,A^c) = 1$, 由 $P(t,x,A)$ 关于 t 是连续的, 以及引理 2.7 可知 $P(t,y,A^c) > 0, \ \forall t \in R_+$, 因此 $\int_0^\infty P(t,y,A^c)dt > 0$, 所以 $y \in B^c$).

令 $C := \{y \in E : P_y(\tau_{A^c} < \infty) = 0\}$, 下面证明 $B = C$.

若 $y \in B$, 由 B 的定义, 有 $\int_0^\infty P(t,y,A^c)dt = 0$. 由 $B \subset A$ 及引理 2.7 可知, $\forall t \in R_+$, 有 $P(t,y,A^c) = 0$, 所以 $P_y(\tau_{A^c} = \infty) = 1$, 即 $y \in C$. 因此 $B \subset C$.

若 $y \in C$, 由 C 的定义, 有 $P_y(\tau_{A^c} < \infty) = 0$, 则 $\exists t > 0$, 使得 $P(t,y,A^c) = 0$. 由引理 2.7, $\forall t > 0$, 有 $P(t,y,A^c) = 0$, 所以 $\int_0^\infty P(t,x,A^c)dt = 0$, 即 $y \in B$. 因此 $C \subset B$.

由 $\psi(A^c)=0$ 及定理 1.2(3), 有 $\psi\{y: P_y(\tau_{A^c}<\infty)>0\}=0$, 所以 $\psi(C)=\psi\{y: P_y(\tau_{A^c}<\infty)=0\}=1$. 由 $B=C$ 可知, B 是一个满集.

下证 B 是一个吸收集. 反证法, 若 $\exists x\in B,\ s>0$, 满足 $P(s,x,B^c)>0$. 由 C-K 方程, 有

$$\begin{aligned}0&=\int_0^\infty P(t,x,A^c)dt\ge\int_0^\infty P(s+t,x,A^c)dt=\int_0^\infty\int_E P(s,x,dy)P(t,y,A^c)dt\\ &\ge\int_{B^c}P(s,x,dy)\int_0^\infty P(t,y,A^c)dt,\end{aligned}$$

由 B 的定义及 $P(s,x,B^c)>0$ 可知 $\int_{B^c}P(s,x,dy)\int_0^\infty P(t,y,A^c)dt>0$, 矛盾. 因此 $\forall s\ge 0, x\in B$, 有 $P(s,x,B^c)=0$, 即 B 是一个吸收集.

定理 1.4 的证明 设 $\sup\limits_{x\in C}E_x[\tau_C]<\infty$, 则 $\forall x\in C$, 都有 $P_x(\tau_C<\infty)=1$. 令

$$C^\infty:=\{x\in E: P_x(\tau_C<\infty)=1\},$$

则 $C\subset C^\infty$.

下面证明 C^∞ 是跳过程的吸收集. 用 θ 表示通常的漂移算子, 注意到在 $\{J_1<\infty\}$ 的条件下, $I_{\{\tau_A<\infty\}}=I_{\{J_1+\theta^{J_1}\sigma_A<\infty\}}=I_{\{\theta^{J_1}\sigma_A<\infty\}}=\theta^{J_1}I_{\{\sigma_A<\infty\}}$, 由强马氏性, 有

$$\begin{aligned}&P_x(\tau_A<\infty)=P_x(X_{J_1}\in A,\tau_A<\infty)+P_x(X_{J_1}\in A^c,\tau_A<\infty)\\ =\ &P_x(X_{J_1}\in A,J_1=\tau_A<\infty)+E_x[I_{\{X_{J_1}\in A^c\}}I_{\{\tau_A<\infty\}}]\\ =\ &P_x(X_{J_1}\in A)+E_x[I_{\{X_{J_1}\in A^c\}}E[\theta^{J_1}I_{\{\sigma_A<\infty\}}|\mathcal{F}_{J_1}]]\\ =\ &\frac{q(x,A)}{q(x)}+E_x[I_{\{X_{J_1}\in A^c\}}E_{X_{J_1}}[I_{\{\sigma_A<\infty\}}]]\\ =\ &\frac{q(x,A)}{q(x)}+\int_{A^c}\frac{q(x,dy)}{q(x)}P_y(\tau_A<\infty).\end{aligned}\tag{3.3}$$

反证法, 假设 $\exists x\in C^\infty$, 使得 $\Pi(x,(C^\infty)^c)=\frac{q(x,(C^\infty)^c)}{q(x)}>0$, 由 (3.3) 式及 $C\subset C^\infty$, 有

$$\begin{aligned}1\ &=\ P_x(\tau_C<\infty)=\frac{q(x,C)}{q(x)}+\int_{C^c\cap C^\infty}\frac{q(x,dy)}{q(x)}P_y(\tau_C<\infty)+\int_{C^c\cap(C^\infty)^c}\frac{q(x,dy)}{q(x)}P_y(\tau_C<\infty)\\ &=\ \frac{q(x,C)}{q(x)}+\frac{q(x,C^c\cap C^\infty)}{q(x)}+\int_{(C^\infty)^c}\frac{q(x,dy)}{q(x)}P_y(\tau_C<\infty)\\ &<\ \frac{q(x,C)}{q(x)}+\frac{q(x,C^c\cap C^\infty)}{q(x)}+\frac{q(x,(C^\infty)^c)}{q(x)}=1,\end{aligned}$$

矛盾, 所以 $\forall x\in C^\infty$, 都有 $\frac{q(x,(C^\infty)^c)}{q(x)}=0$, 即 $\Pi(x,C^\infty)=\frac{q(x,C^\infty)}{q(x)}=1$, 所以 C^∞ 是跳跃链的吸收集, 由引理 2.10 可知, C^∞ 也是跳过程的吸收集, 因此 C^∞ 是满集, 即 $\psi\{x\in E: P_x(\tau_C<\infty)=1\}=1$. 由定理 1.2 (3) 可知 $\psi(C)>0$, 即 $C\in\mathcal{E}^+$. 定理证毕.

4 跳过程, 跳跃链, 骨架链, 预解链的 φ - 不可约之间的关系

下面几个命题讨论了跳过程、跳跃链、骨架链和预解链的 φ - 不可约的等价性.

命题 4.1 跳过程 $P(t,x,A)$ 是 φ - 不可约的 $\Leftrightarrow$ 跳跃链 $\Pi(x,A)$ 是 φ - 不可约的.

证 $\Leftarrow$ 设跳跃链 $\Pi(x,A)$ 是 φ - 不可约的, 则当 $\varphi(A)>0$ 时, 存在 n, 使得 $\forall x\in E$, 都有 $\Pi^n(x,A)>0$. 由 $q(x)<\infty$, $\forall x\in E$, 有 $\frac{1}{q(x)}>0$, $\forall x\in E$, 因此 $\displaystyle\int_A \Pi^n(x,dy)\frac{1}{q(y)}>0$. 由引理 2.8, 有

$$\int_0^\infty P(t,x,A)dt=\sum_{k=0}^\infty\int_A \Pi^k(x,dy)\frac{1}{q(y)}\geq\int_A \Pi^n(x,dy)\frac{1}{q(y)}>0.$$

所以跳过程 $P(t,x,A)$ 是 φ - 不可约的.

$\Rightarrow$ 设跳过程 $P(t,x,A)$ 是 φ - 不可约的, 则当 $\varphi(A)>0$ 时, $\forall x\in E$, 都有 $\displaystyle\int_0^\infty P(t,x,A)dt>0$. 由引理 2.8, 有

$$\sum_{k=0}^\infty\int_A \Pi^k(x,dy)\frac{1}{q(y)}=\int_0^\infty P(t,x,A)dt>0.$$

所以 $\exists n$ 使得

$$\int_A \Pi^n(x,dy)\frac{1}{q(y)}>0,\ \ \forall x\in E.$$

因此 $\Pi^n(x,A)>0,\ \forall x\in E$. 由引理 2.11 可知, 跳跃链 $\Pi(x,A)$ 是 φ - 不可约的. 命题证毕.

命题 4.2 跳过程 $P(t,x,A)$ 是 φ - 不可约的 $\Leftrightarrow$ h - 骨架链 $\{X_{nh},n\in Z_+\}$ 是 φ - 不可约的.

证 $\Leftarrow$ 设 h - 骨架链 $\{X_{nh},n\in Z_+\}$ 的 m - 步转移概率函数为

$$P_h^m(x,A):=P(mh,x,A),m\geq 1.$$

由 h - 骨架链 $\{X_{nh},n\in Z_+\}$ 是 φ - 不可约的, 则当 $\varphi(A)>0$ 时, $\forall x\in E,\ \exists m\geq 1$, 使得 $P_h^m(x,A):=P(mh,x,A)>0$. 由引理 2.12 可知, 跳过程 $P(t,x,A)$ 是 φ - 不可约的.

$\Rightarrow$ 设跳过程 $P(t,x,A)$ 是 φ - 不可约的, 则当 $\varphi(A)>0$ 时, $\forall x\in E,\ \ \forall t>0$, 有 $P(t,x,A)>0$. 更有 $P_h^m(x,A):=P(mh,x,A)>0$, 由引理 2.11 可知, h - 骨架链 $\{X_{nh},n\in Z_+\}$ 是 φ - 不可约的. 命题证毕.

记

$$R(x,A):=\int_0^\infty e^{-t}P(t,x,A)dt,\ x\in E,A\in\mathcal{E},$$

为 $P(t,x,A)$ 的一阶预解核, 以 $R(x,A)$ 为一步转移概率的马氏链称为 $P(t,x,A)$ 的预解链.

命题 4.3 跳过程 $P(t,x,A)$ 是 φ - 不可约的 $\Leftrightarrow$ 预解链 $R(x,A)$ 是 φ - 不可约的.

证 $\Leftarrow$ 设预解链 $R(x,A)$ 是 φ - 不可约的, 则当 $\varphi(A)>0$ 时, $\forall x\in E,\ \exists n\geq 1$, 使得 $R^n(x,A)>0$. 由 C-K 方程, 有

$$\begin{aligned}R^2(x,A)&=\int_E R(x,dy)R(y,A)=\int_E\int_0^\infty e^{-t_1}P(t_1,x,dy)dt_1\int_0^\infty e^{-t_2}P(t_2,y,A)dt_2\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(t_1+t_2)}\int_E P(t_1,x,dy)P(t_2,y,A)dt_1dt_2\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(t_1+t_2)}P(t_1+t_2,x,A)dt_1dt_2.\end{aligned}$$

可以归纳地证明

$$R^n(x,A)=\underbrace{\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty}_{n} e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}t_i}P(\sum_{i=1}^{n}t_i,x,A)dt_1\cdots dt_n.$$

由 $\forall x\in E, R^n(x,A)>0$, 所以存在 $m_1,\cdots,m_n$ 使得

$$P(\sum_{i=1}^{n}m_i,x,A)>0,\quad \forall x\in E.$$

由引理 2.12 可知, 跳过程 $P(t,x,A)$ 是 φ - 不可约的.

$\Rightarrow$ 设跳过程 $P(t,x,A)$ 是 φ - 不可约的, 则当 $\varphi(A)>0$ 时, 有

$$P(t,x,A)>0,\ \forall t>0,x\in E.$$

等价地有

$$R(x,A):=\int_0^\infty e^{-t}P(t,x,A)dt>0,\ \ \forall x\in E.$$

由引理 2.11 可知, 预解链 $R(x,A)$ 是 φ - 不可约的.

参 考 文 献

[1] Meyn S P, Tweedie R L. Markov chains and stochastic stability[M]. London: Springer-Verlag, 1992.
[2] Chen Mufa. Form markov chains to non-equilibrium particle systems(second edition)[M]. Singapore: World Scientific, 2004.
[3] 胡迪鹤. 随机过程论: 基础, 理论, 应用 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2005.

THE IRREDUCIBLE OF JUMP PROCESSES ON GENERAL STATE SPACE

ZHANG Shui-li[1,2], QU Cong[1]
(*1.Institute of Mathematics and Information Science, Pingdingshan University, Pingdingshan 467000, China*)
(*2.Institute of Mathematics and Computer Science, Hubei University, Wuhan 430062, China*)

Abstract: In this paper, we research the irreducible of jump processes on general state space. By using the method similar to markov chains, we obtain the maximal irreducible measure and its properties, the results for time-discrete markov chains on general state space are enlarged. As an application, a sufficient condition for $C\in\mathcal{E}^+$ is given. Moreover, the equivalence of φ-irreducible for jump processes, skeleton chain, embed chain and resolvent chain are proved.

Keywords: jump processes; φ-irreducible; q-pair
2010 MR Subject Classification: 60J75; 60G07