

# 应用弹性振子点阵模型数值模拟 表面带裂痕材料中的激光激发声表面波<sup>\*</sup>

原 森<sup>†</sup> 沈中华 陆 建 倪晓武

(南京理工大学信息物理与工程系 南京 210094)

**摘要** 本文将激光等效为垂直力源, 建立弹性振子点阵模型, 并采用数值模拟的方法对线源激光在金属材料中所产生超声及其传播进行了研究, 着重针对有无裂痕材料表面上接收到的波形进行了对比和分析。该方法特别适合处理边界问题, 因此也易于处理有缺陷材料中的激光超声问题。

**关键词** 弹性振子, 线源, 表面波, 掠面纵波

## Mass spring lattice modeling of the laser generated surface acoustic waves in a plate with surface notch

YUAN Sen SHEN Zhong-Hua LU Jian NI Xiao-Wu

(Department of Information Physics and Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094)

**Abstract** A pulsed laser source is assumed to be a vertical force and a mass spring lattice model (MSLM) is applied. Utilizing the method of numerical simulation, the whole process of the generation and propagation of ultrasound is simulated in a metal material. Furthermore, the scattering of the surface acoustic wave by a surface breaking crack perpendicular to the free surface, is investigated. The MSLM has the special advantage in treating complex boundary conditions, and our results show that it is a powerful tool to model the ultrasonic wave propagation in elastic media with cracks.

**Key words** Mass spring lattice model, Linear source, SAW, Surface longitudinal wave

2004-11-29 收稿; 2005-08-01 定稿

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目 (6020800); 江苏省自然科学基金; 教育部高校优秀青年教师奖励计划和激光技术国家重点实验室开放基金 (2005) 资助。

作者简介: 原森, (1976-), 男, 山东青岛人, 硕士生, 主要从事激光超声的理论及实验研究。

沈中华 (1973-), 女, 南京理工大学信息物理及工程系副教授, 博士后, 硕士生导师。陆建 (1965-), 男, 南京理工大学信息物理及工程系教授, 博士, 博士生导师。倪晓武 (1955-), 男, 南京理工大学信息物理及工程系教授, 博士, 博士生导师。

<sup>†</sup> 通讯联系人 Email: forrest0817@tom.com

## 1 引言

无损检测 (Nondestructive Evaluation 简称 NDE) 技术经常需要研究弹性波的传播和散射。随着 NDE 技术的不断发展, 人们对表面波 (SAW) 传播的预测的量化精度不断提高, 因此人们对于表面波的量化分析的兴趣越来越大。数值方法经常被用于模拟和分析待测样品中的弹性波。应用最广泛的弹性波数值分析方法包括有限元法 (Finite Element Method 简称 FEM)<sup>[1]</sup>、边界元法 (Boundary Element Method 简称 BEM)<sup>[2]</sup> 和有限差分法 (Finite Difference Method 简称 FDM)<sup>[3~5]</sup>。应用有限元和边界元法通常处理边界问题时比较复杂, 计算结果的精度随网格划分的疏密变化较大, 且计算量较大, 不适合工程应用中的快速建模和仿真。单纯应用有限差分法, 对模型几何形状要求苛

刻, 也不易于应用于边界问题处理; 而应用弹性振子模型 (MSLM)<sup>[6~8]</sup>, 结合有限差分的成熟算法, 特别适合处理边界问题。故将 MSLM 应用于自由表面上的声表面波、板波以及其它模式波的情况, 尤其是当表面波遇到表面裂痕时显得格外方便, 算法简单可靠, 使计算速度加快。本文应用 MSLM 对线源激光在各向同性的金属材料中所产生超声及其传播进行了研究, 将激光等效为垂直力源, 着重针对材料表面有垂直表面裂痕时接收到的波形进行了分析。

## 2 弹性阵子点阵模型

### 2.1 弹性阵子点阵模型

图 1 为各向同性的铝板受激光照射时的横截面图。激光源为沿  $z$  方向 (垂直  $xy$  平面) 的线源, 故可以在材料的横断面建立弹性振子点阵模型。

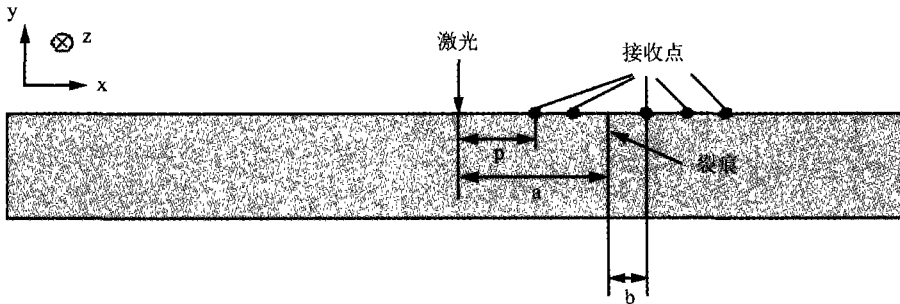


图 1 有缺陷材料横断面图

注: 图 1 中  $b$  表示探测点距离裂痕前沿的距离 (当裂痕位于探测点右侧时  $b < 0$ , 反之,  $b > 0$ ),  $a$  表示裂痕到激发的距离,  $p$  表示激发源与接收点间的距离。

将横截面  $xy$  平面划分为如图 2 所示的网格, 网格长宽都是  $h$ 。各个节点被模型化为质点, 而质点之间以理想的微小弹簧相互连接, 如图 3 所示。 $x$  方向和  $y$  方向的伸缩弹性系数用  $k_1, k_3$  表示, 且  $k_1 = k_3$ , 45 度斜方向的伸

缩弹性系数用  $k_2$  表示, 而扭动弹性系数用  $\alpha k_2$  表示<sup>[6,8]</sup>。

对如图 (3) 所示的质点  $i, j$  进行受力分析得到下面两式<sup>[6]</sup>:

$$\frac{\rho(u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j}^{k-1} - 2u_{i,j}^k)}{(\Delta t)^2} = F_x + \frac{k_1(u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k - 2u_{i,j}^k)}{h^2} + \frac{k_2(u_{i+1,j+1}^k + u_{i+1,j-1}^k + u_{i-1,j+1}^k + u_{i-1,j-1}^k - 4u_{i,j}^k)}{2h^2}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{k_2\beta(u_{i+1,j+1}^k + u_{i+1,j-1}^k + u_{i-1,j+1}^k + u_{i-1,j-1}^k - 4u_{i,j}^k)}{2h^2} \\
& + \frac{k_2(v_{i+1,j+1}^k - v_{i+1,j-1}^k - v_{i-1,j+1}^k + v_{i-1,j-1}^k)}{2h^2} \\
& + \frac{k_2\beta(-v_{i+1,j+1}^k + v_{i+1,j-1}^k + v_{i-1,j+1}^k - v_{i-1,j-1}^k)}{2h^2} \quad (1) \\
\frac{\rho(v_{i,j}^{k+1} + v_{i,j}^{k-1} - 2v_{i,j}^k)}{(\Delta t)^2} = F_y & + \frac{k_1(v_{i,j+1}^k + v_{i,j-1}^k - 2v_{i,j}^k)}{h^2} \\
& + \frac{k_2(v_{i+1,j+1}^k + v_{i+1,j-1}^k + v_{i-1,j+1}^k + v_{i-1,j-1}^k - 4v_{i,j}^k)}{2h^2} \\
& + \frac{k_2\beta(v_{i+1,j+1}^k + v_{i+1,j-1}^k + v_{i-1,j+1}^k + v_{i-1,j-1}^k - 4v_{i,j}^k)}{2h^2} \\
& + \frac{k_2(u_{i+1,j+1}^k - u_{i+1,j-1}^k - u_{i-1,j+1}^k + u_{i-1,j-1}^k)}{2h^2} \\
& + \frac{k_2\beta(-u_{i+1,j+1}^k + u_{i+1,j-1}^k + u_{i-1,j+1}^k - u_{i-1,j-1}^k)}{2h^2} \quad (2)
\end{aligned}$$

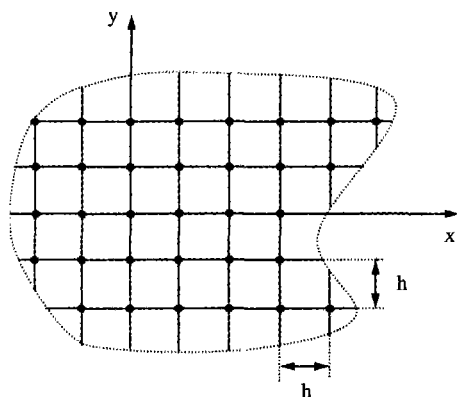


图 2 在材料横断面划分 MSLM 网格

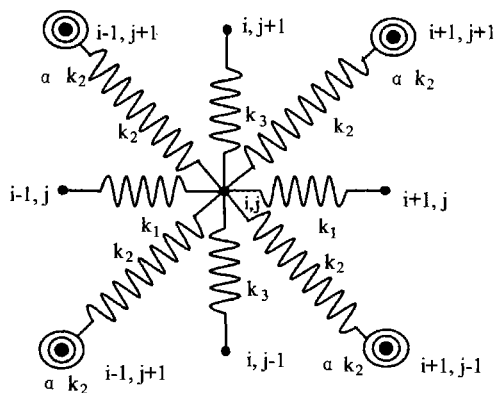


图 3 弹性振子模型的一个单元

其中:  $k$  为时间步长数<sup>[6]</sup>,  $\rho$  为材料的密度,  $u$ 、 $v$  表示弹性振子在水平、垂直方向的位移,

$F_x$  和  $F_y$  为分别为  $x$  和  $y$  方向的作用力, 为方便计算引入中间变量  $\beta = \alpha/2h^2$ 。现在我们将激光等效为垂直力源, 故  $F_x = 0$ 。

对于各向同性的金属材料, 根据二维弹性波波方程的有限差分形式可得到弹性系数  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  和  $\beta$  由拉梅常数  $\lambda$ ,  $\mu$  表示的表达式<sup>[6]</sup>:

$$k_1 = \lambda + \mu, \quad k_2 = \frac{\lambda + 3\mu}{4}, \quad \beta = \frac{\mu - \lambda}{\lambda + 3\mu} \quad (3)$$

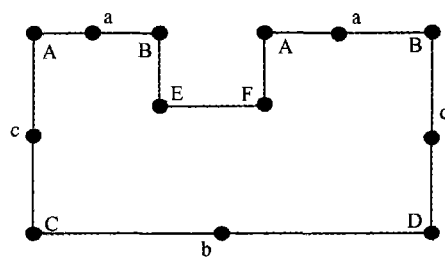


图 4 各种类型的边界点

图 4 是有表面带有裂痕材料中的几种边界点, 通过对这几类节点进行受力分析, 我们可以得到图 4 所示模型中矩形裂痕周围各种边界点的公式, 直线边界点以  $a$  点为例, 可以得到(4)式:

$a$  类边界点:

$$\begin{aligned}
\frac{\rho(u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j}^{k-1} - 2u_{i,j}^k)}{(\Delta t)^2} &= \frac{k_1(u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k - 2u_{i,j}^k)}{h^2} + \frac{k_2(u_{i+1,j-1}^k + u_{i-1,j-1}^k - 2u_{i,j}^k)}{h^2} \\
&\quad + \frac{k_2\beta(u_{i+1,j-1}^k + u_{i-1,j-1}^k - 2u_{i,j}^k)}{h^2} \\
&\quad + \frac{k_2(-v_{i+1,j-1}^k + v_{i-1,j-1}^k)}{h^2} + \frac{k_2\beta(v_{i+1,j-1}^k - v_{i-1,j-1}^k)}{h^2} \\
\frac{\rho(v_{i,j}^{k+1} + v_{i,j}^{k-1} - 2v_{i,j}^k)}{(\Delta t)^2} &= \frac{2k_1(v_{i,j-1}^k - v_{i,j}^k)}{h^2} + \frac{k_2(v_{i+1,j-1}^k + v_{i-1,j-1}^k - 2v_{i,j}^k)}{h^2} \\
&\quad + \frac{k_2\beta(v_{i+1,j-1}^k + v_{i-1,j-1}^k - 2v_{i,j}^k)}{h^2} \\
&\quad + \frac{k_2(-u_{i+1,j-1}^k + u_{i-1,j-1}^k)}{h^2} + \frac{k_2\beta(u_{i+1,j-1}^k - u_{i-1,j-1}^k)}{h^2}
\end{aligned} \quad (4)$$

外角边界以 A 点为例得到 (5) 式:

$$\begin{aligned}
\frac{\rho(u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j}^{k-1} - 2u_{i,j}^k)}{(\Delta t)^2} &= \frac{2k_1(u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k)}{h^2} + \frac{2k_2(u_{i+1,j-1}^k - u_{i,j}^k)}{h^2} \\
&\quad + \frac{2k_2\beta(u_{i+1,j-1}^k - u_{i,j}^k)}{h^2} \\
&\quad + \frac{2k_2(v_{i,j}^k - v_{i+1,j-1}^k)}{h^2} + \frac{2k_2\beta(v_{i+1,j-1}^k - v_{i,j}^k)}{h^2} \\
\frac{\rho(v_{i,j}^{k+1} + v_{i,j}^{k-1} - 2v_{i,j}^k)}{(\Delta t)^2} &= \frac{2k_1(v_{i,j-1}^k - v_{i,j}^k)}{h^2} + \frac{2k_2(v_{i+1,j-1}^k - v_{i,j}^k)}{h^2} \\
&\quad + \frac{2k_2\beta(v_{i+1,j-1}^k - v_{i,j}^k)}{h^2} \\
&\quad + \frac{2k_2(u_{i,j}^k - u_{i+1,j-1}^k)}{h^2} + \frac{2k_2\beta(u_{i+1,j-1}^k - u_{i,j}^k)}{h^2}
\end{aligned} \quad (5)$$

内角边界以 E 点为例得到 (6) 式:

$$\begin{aligned}
\frac{\rho(u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j}^{k-1} - 2u_{i,j}^k)}{(\Delta t)^2} &= \frac{k_1(u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k - 2u_{i,j}^k)}{h^2} + \frac{2k_2(u_{i+1,j-1}^k + u_{i-1,j+1}^k + u_{i-1,j-1}^k - 3u_{i,j}^k)}{3h^2} \\
&\quad + \frac{2k_2\beta(u_{i+1,j-1}^k + u_{i-1,j+1}^k + u_{i-1,j-1}^k - 3u_{i,j}^k)}{3h^2} \\
&\quad + \frac{2k_2(v_{i,j}^k - v_{i+1,j-1}^k - v_{i-1,j+1}^k + v_{i-1,j-1}^k)}{3h^2} \\
&\quad + \frac{2k_2\beta(-v_{i,j}^k + v_{i+1,j-1}^k + v_{i-1,j+1}^k - v_{i-1,j-1}^k)}{3h^2} \\
\frac{\rho(v_{i,j}^{k+1} + v_{i,j}^{k-1} - 2v_{i,j}^k)}{(\Delta t)^2} &= \frac{k_1(v_{i,j+1}^k + v_{i,j-1}^k - 2v_{i,j}^k)}{h^2} \\
&\quad + \frac{k_2(v_{i+1,j+1}^k + v_{i+1,j-1}^k + v_{i-1,j+1}^k + v_{i-1,j-1}^k - 4v_{i,j}^k)}{2h^2} \\
&\quad + \frac{k_2\beta(v_{i+1,j+1}^k + v_{i+1,j-1}^k + v_{i-1,j+1}^k + v_{i-1,j-1}^k - 4v_{i,j}^k)}{2h^2}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{k_2(u_{i+1,j+1}^k - u_{i+1,j-1}^k - u_{i-1,j+1}^k + u_{i-1,j-1}^k)}{2h^2} + \frac{k_2\beta(-u_{i+1,j+1}^k + u_{i+1,j-1}^k + u_{i-1,j+1}^k - u_{i-1,j-1}^k)}{2h^2} \quad (6)$$

表 1 铝材料参数表

| Material | Young's modulus (Pa)  | Poisson's ratio | Lamé constants        |                       | Density $\rho$ (kgm <sup>-3</sup> ) |
|----------|-----------------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|-------------------------------------|
|          |                       |                 | $\lambda$ (Pa)        | $\mu$ (Pa)            |                                     |
| 铝        | $7.02 \times 10^{10}$ | 0.345           | $5.81 \times 10^{10}$ | $2.61 \times 10^{10}$ | $2.70 \times 10^3$                  |

而对于空间步长  $h$  和时间步长  $\Delta t$ , 我们取  $\Delta t = 7\mu\text{m}$ ,  $h = 1\text{ns}$ , 步长选取的原则详见参考文献 [6]。

$$F_y = F_0 g(t); \quad (7)$$

式中  $g(t)$  力源的时间分布, 其表达式如下:

$$g(t) = (t/\tau_0) \exp(-t/\tau_0); \quad (8)$$

在我们的计算中取  $\tau_0 = 15\text{ns}$ , 力源的空间形态为  $\delta(x)$ 。我们选用铝板作为激发材料, 铝材料的一些参数如表 1 所示 [9]。

### 3 数值计算结果及分析

#### 3.1 无裂痕板材的数值计算结果

我们先对厚度为  $2.8\text{mm}$  的没有裂痕的铝板进行计算, 在距离激发源  $350\mu\text{m}$  处接收到如图 5 的波形。从图中可以看到清晰的掠面纵波 SP、掠面横波 SS 和表面波 R。最先到达的应该是掠面纵波, 根据接收距离和铝材料的纵波速度, 可以得到掠面纵波的到达时间是  $54\text{ns}$ , 这与图中结果为  $54.7\text{ns}$  是完全吻合的。而横波速度和表面波速度接近, 近似为纵波速度的一半, 因此图中掠面横波和表面波连接在一起, 到达时间大约为掠面纵波到达时间的两倍。这和其他数值方法得到的波形是一致的 [1,4,5], 从而说明我们建立的模型是有效的。

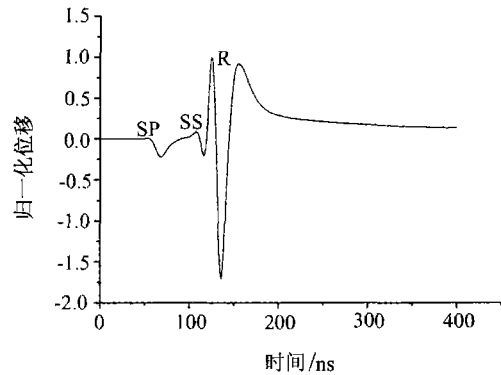


图 5 铝板表面无裂痕时距离光源处接受到的垂直方向的位移

#### 3.2 有表面裂痕材料的数值计算结果

我们选取  $7.2\text{cm}$  宽  $7.2\text{mm}$  厚的铝板作为激发材料, 于中心 O 处激发, 裂痕位置距离点源  $a = 1350\mu\text{m}$ , 裂痕长宽都是  $36\mu\text{m}$ , 此时所用激光线源激发出的超声波中心波长大于裂痕尺寸, 故表面波可发生绕射。

图 6(a), (b) 分别为裂痕前  $630\mu\text{m}$ ,  $450\mu\text{m}$  处接收到的波形, 从图中明显可以看到两个波群。前面一个波群与无裂痕时的基本一致。在裂痕前  $630\mu\text{m}$  接收时, 掠面纵波 (SP), 掠面横波 (SS), Rayleigh 波 (R) 分别于  $113\text{ns}$ ,  $225\text{ns}$ ,  $243\text{ns}$  时到达; 在裂痕前  $450\mu\text{m}$  接收时, 分别于  $141\text{ns}$ ,  $281\text{ns}$ ,  $307\text{ns}$  时到达。根据由表 1 中材料参数求得的 Rayleigh 波波速  $V_R = 2940\text{ms}^{-1}$ , 从图中可以明显地观察到后一个波群中有由裂痕反射的 Rayleigh 波 (RR), 该反射 Rayleigh

波在裂痕前  $630\mu\text{m}$  和  $450\mu\text{m}$  接收时的到达时间分别为  $670\text{ns}$  和  $609\text{ns}$ 。

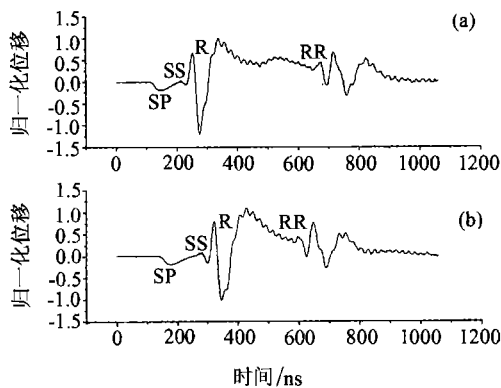


图 6 铝板表面有裂痕时裂痕前接收到的波形  
(a) 裂痕前  $630\mu\text{m}$  处接收波形; (b) 裂痕前  $450\mu\text{m}$  处接收波形

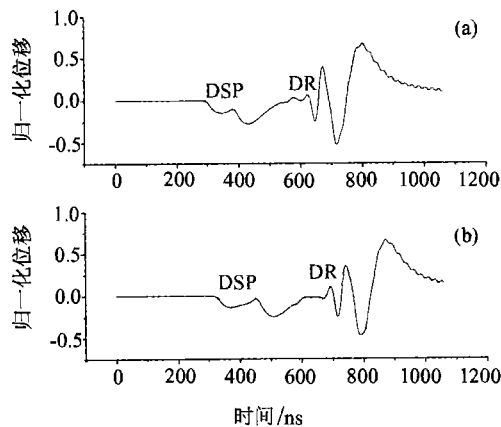


图 7 铝板表面有裂痕时裂痕后接收到的波形  
(a) 裂痕后  $450\mu\text{m}$  处接收波形; (b) 裂痕后  $630\mu\text{m}$  处接收波形

图 7 分别为裂痕后  $450\mu\text{m}$  (a),  $630\mu\text{m}$  (b) 处接收到的波形。在波群中可以观察到明显的绕射掠面纵波 (DSP) 和绕射 Rayleigh 波 (DR), 在裂痕后  $450\mu\text{m}$  处分别于  $280\text{ns}$  和  $609\text{ns}$  时到达, 裂痕后  $630\mu\text{m}$  处分别于  $311\text{ns}$  和  $670\text{ns}$  时到达。

通过对图 6、7 中裂痕前后接收波形的比较, 可以明显地发现有裂痕材料在裂痕前后接收的波中各模式波形都发生了较大变化。各模式波形在裂痕前后与无裂痕材料相比都有相应的展宽<sup>[9]</sup>; 其中掠面纵波在裂痕前是单峰结构, 而在裂痕后是该波却表现为明显的双峰结构。这是由于掠面纵波在裂痕处激发出新的横波和纵波, 它们的波速不同, 从而产生了双峰。从这一点上我们可以判断裂痕是位于激发源是与接收点之间还是激发源与接收点之外。

## 5 结论

本文将激光等效为垂直力源, 建立弹性振子点阵模型, 采用数值模拟的方法对线源激光在金属材料中所产生超声及其传播进行了研究, 着重针对有无裂痕材料表面接收的波形进行了对比和分析。分析了表面接收的不同波成分在裂痕前后波形的各种变化, 能够通过掠面纵波是否有双峰定性的判定裂痕位置。MSLM 方法特别适合处理边界问题, 因此易于处理有缺陷材料中的激光超声问题。

## 参 考 文 献

- 1 Xu Baiqiang, Ni Xiaowu, Shen Zhonghua et al. *J. Chinese Laser*, (中国激光), 2004, **31**(5) (in Chinese).
- 2 Yu G Y. *Computational Mechanics*, 2002, **29**(3):191~198.
- 3 Dahake G, Gracewski S M. *Oceanographic Literature Review*, 1998, **45**(1):184~190.
- 4 Blake R J, Bond L J. *NDT& E International*, 1996, **29**(4):255~257.
- 5 Fellingner F, Langenberg K J. *NDT& E International*, 1996, **29**(4):253~254.
- 6 Yim H, Sohn Y. *IEEE Trans.*, 2000, **UFFC47**(3): 549~558.
- 7 Sohn Y, Krishnaswamy S. *Ultrasonics*, 2002, (39):543~551.
- 8 Yim H, Choi Y. *Mater. Eval.*, 2000, **58**(7):889~896.
- 9 袁易全, 陈思忠等. 近代超声原理与应用, 南京: 南京大学出版社, 1996, 323~352.
- 10 Wu T T, Fang J S, Liu P L. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1995, **97**(3):1453~1460.