

复射影空间 $CP^{\frac{n+p}{2}}$ 中具有 2 - 调和的一般子流形

范胜雪¹, 宋卫东²

(1. 南京邮电大学通达学院, 江苏 扬州 225127)

(2. 安徽师范大学数学计算机科学学院, 安徽 芜湖 241000)

摘要: 本文研究了复射影空间中具有 2 - 调和的一般子流形问题. 利用活动标架法, 获得了这类子流形成为极小子流形的 Pinching 定理和 Simons 型积分不等式, 此外还得到关于 2 - 调和伪脐一般子流形的一个刚性定理, 推广了复射影空间中具有 2 - 调和全实子流形的一些相应结果.

关键词: 复射影空间; 一般子流形; 2 - 调和; 伪脐; 平行平均曲率; 全测地

MR(2010) 主题分类号: 53C20; 53C40

中图分类号: O186.16

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)02-0375-06

1 引言及主要结论

设 N 是具有近复结构 J 的 Kaehler 流形, M 是 N 的等距浸入子流形, 若 M 上每点切空间被 J 变换到该点法空间 (切空间) 中, 则称 M 为 N 的全实 (全纯) 子流形; 若 M 上每点法空间被 J 变换到该点切空间中, 则称 M 为 N 的一般子流形. 特别的, 当 $\text{codim} M = 1$ 时, M 为 N 的实超曲面. 关于全实子流形和全纯子流形已有许多研究结果, 但对于一般子流形而言, 研究的文章相对较少, 而且主要集中在极小子流形和超曲面等情形. 这主要是因为一般子流形的结构复杂, 相关计算繁琐, 如果不对子流形条件加以某种限制, 要得到漂亮结果是困难的.

文献 [1] 讨论了黎曼流形中的 2 - 调和映照, 文献 [2] 讨论了复空间形式中的全实 2 - 调和子流形, 文献 [3, 4] 讨论了复射影空间中的一般子流形的性质. 本文利用活动标架法, 研究了复射影空间中具有 2 - 调和的一般子流形, 首先考虑: 在什么条件下, 复射影空间 $CP^{\frac{n+p}{2}}$ 中的 2 - 调和一般子流形是极小子流形, 证明了

定理 1 设 M^n 是复 $\frac{n+p}{2}$ 维复射影空间 $CP^{\frac{n+p}{2}}$ 中具有平行平均曲率向量的 2 - 调和一般子流形, 如果 M^n 的第二基本形式模长平方 $S < n + 3$, 则 M^n 是极小子流形.

文献 [2, 5] 研究了复射影空间中的全实 2 - 调和子流形的性质, 考虑内维空间是一般子流形的情形, 得到

定理 2 设 M^n 是复 $\frac{n+p}{2}$ 维复射影空间 $CP^{\frac{n+p}{2}}$ 中具有紧致定向 2 - 调和的一般子流形, 则有如下积分不等式

$$\int_{M^n} [(3 - \frac{2}{p})S^2 - (n-1)S + n^2H^2S + (n+4)n^2H^2 - 2p(n-p)]dV \geq 0.$$

*收稿日期: 2012-12-17

接收日期: 2013-04-11

基金项目: 安徽省教育厅自然科学重点项目 (KJ2010A125); 安徽省高等学校优秀青年人才基金项目 (2011SQRL021ZD); 安徽省高等学校省级自然科学基金项目 (KJ2012B197).

作者简介: 范胜雪 (1986-), 男, 安徽亳州, 硕士, 主要研究方向: 整体微分几何.

通讯作者: 宋卫东.

推论 3 设 M^n 是复 $\frac{n+p}{2}$ 维复射影空间 $CP^{\frac{n+p}{2}}$ 中具有平行平均曲率向量的 2 - 调和一般子流形, 如果 $S < \frac{p(n-1)}{3p-2}$, 则 M^n 全测地.

文献 [5] 讨论了 CP^n 中紧致的全实 2 - 调和伪脐子流形, 得到这类子流形必为极小子流形, 考虑 $CP^{\frac{n+p}{2}}$ 中具有紧致 2 - 调和伪脐的一般子流形的情形, 得到

定理 4 设 M^n 是复 $\frac{n+p}{2}$ 维复射影空间 $CP^{\frac{n+p}{2}}$ 中具有紧致 2 - 调和伪脐的一般子流形, 则 M^n 具有平行平均曲率向量.

推论 5 设 M^n 是复 $\frac{n+p}{2}$ 维复射影空间 $CP^{\frac{n+p}{2}}$ 中具有紧致 2 - 调和伪脐的一般子流形, 如果 $S < \frac{p(n-1)}{3p-2}$, 则 M^n 全测地.

2 预备知识

在本文中对各类指标的取值范围约定如下:

$$\begin{aligned} A, B, C, \cdots &= 1, \cdots, m, 1', \cdots, m'; \alpha, \beta, \gamma, \cdots = (m-p+1), \cdots, m; \\ i, j, k, \cdots &= 1, \cdots, m-p, 1', \cdots, (m-p)', (m-p+1)', \cdots, m'; \\ s, t, \cdots &= 1, \cdots, (m-p), 1', \cdots, (m-p)'; \lambda, \mu, \cdots = 1, \cdots, (m-p). \end{aligned}$$

下面设 CP^m 是具有 Fubini-Study 度量的复 m 维射影空间, 其全纯截面曲率为 4, 复结构为 J , M^n 为 CP^m 中的 n 维一般子流形. 在 CP^m 中选取局部标准正交标架场 $e_1, \cdots, e_{m-p}, e_{1'}, \cdots, e_{m'}, e_{m-p+1}, \cdots, e_m$, 使得当它们限制在 M^n 上时, $e_{m-p+1}, \cdots, e_m$ 与 M^n 正交. 设 $\{\omega_A\}, \{\omega_{AB}\}$ 分别是对应的对偶标架场和联络形式. 记 $P_{ij} = J_{ij}$, $F_j^\alpha = J_{\alpha j}$, 则有 [4]

$$\omega_\alpha = 0, \omega_{\alpha i} = \sum_j h_{ij}^\alpha \omega^j, h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha, \quad (2.1)$$

$$\sum_j F_j^\alpha F_j^\beta = \delta_{\alpha\beta}, \sum_j P_{ij} F_j^\alpha = 0, \sum_k P_{ik} P_{kj} = \sum_\alpha F_i^\alpha F_j^\alpha - \delta_{ij}, \quad (2.2)$$

$$R_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk} + P_{ik} P_{jl} - P_{il} P_{jk} + 2P_{ij} P_{kl} + \sum_\alpha (h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha - h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha), \quad (2.3)$$

$$R_{ij} = (n+2)\delta_{ij} - 3 \sum_\alpha F_i^\alpha F_j^\alpha + \sum_\alpha (\text{tr} H_\alpha) h_{ij}^\alpha - \sum_{\alpha, k} h_{ik}^\alpha h_{kj}^\alpha, \quad (2.4)$$

$$R = n^2 + 2n - 3p - S + \sum_\alpha (\text{tr} H_\alpha)^2, \quad (2.5)$$

$$R_{\alpha\beta ij} = F_i^\alpha F_j^\beta - F_j^\alpha F_i^\beta + \sum_k (h_{ik}^\alpha h_{kj}^\beta - h_{jk}^\alpha h_{ki}^\beta), \quad (2.6)$$

$$P_{ijk} = \sum_\alpha (F_j^\alpha h_{ik}^\alpha - F_i^\alpha h_{jk}^\alpha), F_{ij}^\alpha = \sum_k P_{ik} h_{kj}^\alpha, \quad (2.7)$$

$$h_{ijk}^\alpha - h_{ikj}^\alpha = P_{ij} F_k^\alpha - P_{ik} F_j^\alpha + 2P_{kj} F_i^\alpha, \quad (2.8)$$

其中 $h_{ijk}^\alpha, P_{ijk}, F_{ij}^\alpha$ 分别是 $h_{ij}^\alpha, P_{ij}, F_i^\alpha$ 的广义共变导数. 进一步, R_{ijkl}, K_{ABCD} 分别是 $M^n, CP^{\frac{n+p}{2}}$ 的曲率张量的分量, M^n 的平均曲率向量场 ξ , 平均曲率 H , 第二基本形式模长

平方 S 可表示为

$$\xi = \frac{1}{n} \sum_{\alpha} \left(\sum_i h_{ii}^{\alpha} \right) e_{\alpha}, H = \|\xi\|^2, S = \sum_{\alpha, i, j} (h_{ij}^{\alpha})^2.$$

引理 1 ^[1] 设 M^n 是 $CP^{\frac{n+p}{2}}$ 中实 n 维 2 - 调和一般子流形, 则

$$\begin{cases} \sum_{\alpha, j, k} (2h_{ik}^{\alpha} h_{jk}^{\alpha} + h_{jj}^{\alpha} h_{ikk}^{\alpha} + h_{jj}^{\alpha} K_{\alpha k i k}) = 0, \forall i, \\ \sum_{j, k} h_{jjk}^{\alpha} - \sum_{\beta, j, k, m} h_{jj}^{\beta} h_{mk}^{\beta} h_{mk}^{\alpha} + \sum_{\beta, j, k} h_{jj}^{\beta} K_{\alpha k \beta k} = 0, \forall \alpha. \end{cases}$$

引理 2 ^[3] 设 M^n 是 $CP^{\frac{n+p}{2}}$ 中实 n 维 2 - 调和一般子流形, 则 $\forall a$, 成立下列公式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \triangle S &= \sum_{\alpha, i, j, k} (h_{ijk}^{\alpha})^2 + \sum_{\alpha, i, j, k} h_{ij}^{\alpha} h_{kkij}^{\alpha} + (1+a) \sum_{\alpha, i, j, k, l} h_{ij}^{\alpha} (h_{kl}^{\alpha} R_{lijk} + h_{li}^{\alpha} R_{lkjk}) \\ &\quad - (na+3)S - (1-a) \sum_{\alpha, \beta} [\text{tr}(H_{\alpha}^2 H_{\beta}^2) - \text{tr}(H_{\alpha} H_{\beta})^2] \\ &\quad + \frac{3}{2} (1-a) \sum_{\alpha, i, j} (F_{ij}^{\alpha} + F_{ji}^{\alpha})^2 + 4 \sum_{\alpha, \beta, i, j, k} h_{ij}^{\alpha} h_{ik}^{\beta} (F_k^{\alpha} F_j^{\beta} - F_j^{\alpha} F_k^{\beta}) \\ &\quad + 3 \sum_{\alpha, \beta, i, j} (\text{tr} H_{\alpha}) F_i^{\alpha} h_{ji}^{\beta} F_j^{\beta} + a \{ \sum_{\alpha, \beta} [\text{tr}(H_{\alpha} H_{\beta})]^2 - \sum_{\alpha, \beta} (\text{tr} H_{\alpha}) [\text{tr}(H_{\beta} H_{\alpha} H_{\beta})] \}. \end{aligned}$$

引理 3 ^[4] 设 M^n 是 $CP^{\frac{n+p}{2}}$ 中实 n 维 2 - 调和一般子流形, 则

$$\sum_{\alpha, \beta, j, k} (H_{ijk}^{\alpha})^2 \geq 2p(n-p).$$

式中等号成立当且仅当 $h_{ijk}^{\alpha} = P_{kj} F_i^{\alpha} - P_{ik} F_j^{\alpha}$ 时成立.

若在一般子流形 M^n 的每点 x 处, 命 $\mathfrak{D}_x \subset T_x(M)$ 是 $J(T_x^{\perp}(M))$ 的正交补, 则 M^n 上分布 $\mathfrak{D}: x \rightarrow \mathfrak{D}_x$ 是全纯的. 作正交分解 $JX = PX + FX, \forall X \in C^{\infty}(M, T(M))$, 其中 PX, FX 分别是 JX 的切分量和法分量. 于是有

引理 4 ^[4] $\mathfrak{D}$ 对合的充要条件是 $A(PX, Y) = A(X, PY)$, 其中 $\forall X, Y \in C^{\infty}(M, T(M))$.

引理 5 ^[4] 设 M^n 为全纯分布对合一般子流形, 则

$$h_{\lambda'\mu}^{\alpha} = h_{\lambda\mu'}^{\alpha}, h_{\lambda\mu}^{\alpha} = -h_{\lambda'\mu'}^{\alpha}, h_{i\beta'}^{\alpha} = h_{i\alpha'}^{\beta}.$$

3 定理证明

定理 1 的证明 由于 M^n 具有平行平均曲率, 即 $\sum_j h_{jjk}^{\alpha} = 0, \forall \alpha, k$. 将 $\sum_i h_{ii}^{\alpha}$ 乘以引理 1 中第二式的两端, 并关于 α 求和, 有

$$0 = \sum_{\alpha, \beta, i, j, k} h_{ii}^{\alpha} h_{jj}^{\beta} h_{km}^{\alpha} - \sum_{\alpha, \beta, i, j, k} h_{jj}^{\beta} h_{ii}^{\alpha} K_{\alpha k \beta k} = \sum_{k, m} \left(\sum_{\beta} \left(\sum_j h_{jj}^{\beta} \right) h_{mk}^{\beta} \right)^2 - \sum_{\alpha, \beta, i, j, k} h_{jj}^{\beta} h_{ii}^{\alpha} K_{\alpha k \beta k}. \quad (3.1)$$

由 Cauchy 不等式

$$\sum_{k,m} (\sum_{\beta} (\sum_j h_{jj}^{\beta}) h_{mk}^{\beta})^2 \leq \sum_{k,m} (\sum_{\beta} (\sum_j h_{jj}^{\beta})^2 \cdot \sum_{\beta} (h_{mk}^{\beta})^2) = n^2 H^2 S. \quad (3.2)$$

根据 (2.6) 式得

$$\sum_{\alpha, \beta, i, j, k} h_{jj}^{\beta} h_{ii}^{\alpha} K_{\alpha k \beta k} = \sum_{\alpha, \beta, i, j, k} h_{jj}^{\beta} h_{ii}^{\alpha} (n+3) \delta_{\alpha \beta} = (n+3) n^2 H^2. \quad (3.3)$$

由 (3.1)–(3.3) 式有 $n^2 H^2 [S - (n+3)] \geq 0$. 若 $S < n+3$, 则唯一可能是 $H = 0$, 即 M^n 是 $CP^{\frac{n+p}{2}}$ 中极小子流形.

在给出定理 2 的证明之前, 先给出引理 6.

引理 6 [6] 设 M^n 是 $CP^{\frac{n+p}{2}}$ 中的一般子流形, 则有

- (1) $\sum_{\alpha, \beta} \text{tr} H_{\alpha} [\text{tr}(H_{\beta} H_{\alpha} H_{\beta})] \geq -n^2 H^2 S;$
- (2) $\frac{1}{p} S^2 \leq \sum_{\alpha, \beta} [\text{tr}(H_{\alpha} H_{\beta})]^2 \leq S^2;$
- (3) $0 \leq \sum_{\alpha, \beta} [\text{tr}(H_{\alpha}^2 H_{\beta}^2) - \text{tr}(H_{\alpha} H_{\beta})^2] \leq \frac{p-1}{p} S^2;$
- (4) $\sum_{\alpha, \beta} \text{tr}(H_{\alpha} H_{\beta}) (\text{tr} H_{\alpha}) (\text{tr} H_{\beta}) \geq 0.$

定理 2 的证明 根据引理 5 得

$$\sum_{\alpha, \beta, i, j} (\text{tr} H_{\alpha}) F_i^{\alpha} h_{ji}^{\beta} F_j^{\beta} = \sum_{\alpha, \beta} \text{tr} H_{\alpha} h_{\alpha' \beta'}^{\beta} = \sum_{\alpha, \beta} \text{tr} H_{\alpha} h_{\beta' \beta'}^{\alpha} = \sum_{\alpha, \beta} (\text{tr} H_{\alpha})^2 = n^2 H^2. \quad (3.4)$$

在 M^n 上定义向量场 $L = \sum_{\alpha, i} h_{\alpha' i}^{\alpha} e_i$, 它与局部基选取无关, 我们称全纯分布 $\mathfrak{D}$ 对合且 $L \in J(T_x^{\perp}(M))$ 的一般子流形为拟全实子流形 [3], 向量 $L \in J(T_x^{\perp}(M))$ 等价于

$$\sum_{\alpha} h_{\alpha' t}^{\alpha} = 0, t = 1, \dots, (m-p), 1', \dots, (m-p)'. \quad (3.5)$$

由引理 5 知, 当 $\mathfrak{D}$ 对合时, $\sum_{\beta} h_{\beta' \beta'}^{\alpha} = \text{tr} H_{\alpha}$, 故有

$$\sum_{\alpha, \beta, i, j, k} h_{ij}^{\alpha} h_{ik}^{\beta} (F_k^{\alpha} F_j^{\beta} - F_j^{\alpha} F_k^{\beta}) = \sum_{\alpha, \beta, i} [(h_{i\beta'}^{\alpha})^2 - h_{i\alpha'}^{\alpha} h_{i\beta'}^{\beta}] \geq -n^2 H^2. \quad (3.6)$$

由 (2.2) 式知 $K_{\alpha k i k} = 0$, 引理 1 的第一式变为

$$\sum_{\alpha, j, k} (2h_{ik}^{\alpha} h_{jjk}^{\alpha} + h_{jj}^{\alpha} h_{ikk}^{\alpha}) = 0. \quad (3.7)$$

对上式两边关于 i 求共变导数, 并求和得

$$\sum_{\alpha, j, k} (2h_{ik}^{\alpha} h_{jjki}^{\alpha} + 3h_{iik}^{\alpha} h_{jjk}^{\alpha} + h_{jj}^{\alpha} h_{kkii}^{\alpha}) = 0.$$

调整指标, 结合引理 1 中第二式得

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, i, j, k} h_{ij}^{\alpha} h_{kkij}^{\alpha} &= -\frac{3}{2} \sum_{\alpha, i, j, k} (h_{jjk}^{\alpha} h_{iik}^{\alpha} + h_{ii}^{\alpha} h_{jjkk}^{\alpha}) + \sum_{\alpha, i, j, k} h_{ii}^{\alpha} h_{jjkk}^{\alpha} \\ &= -\frac{3}{4} \Delta(n^2 H^2) + \sum_{\alpha, \beta} \text{tr}(H_{\alpha} H_{\beta}) (\text{tr} H_{\alpha}) (\text{tr} H_{\beta}) - \sum_{\alpha, \beta, i, j, k} h_{ii}^{\alpha} h_{jj}^{\beta} K_{\alpha k \beta k}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

在引理 2 中取 $a = -1$, 再利用引理 3, 引理 6 及 (3.3)–(3.8) 式, 经计算得

$$\frac{1}{2} \Delta S + \frac{3}{4} \Delta(n^2 H^2) \geq -(3 - \frac{2}{p}) S^2 + (n-1)S - n^2 H^2 S - (n+4)n^2 H^2 + 2p(n-p),$$

由 M^n 紧致性, 再利用 Green 散度定理, 对上式两边积分, 即得定理 2 的积分不等式结论.

推论 3 的证明 若 $S < \frac{p(n-1)}{3p-2}$, 必有 $S < n+3$, 则定理 1 知此时 M^n 是极小的, 即 $H = 0$. 于是定理 2 的结论变为

$$\int_{M^n} [(3 - \frac{2}{p})S - (n-1)] S dV \geq 0,$$

故当 $S < \frac{p(n-1)}{3p-2}$ 时, 唯一可能是 $S = 0$, 即 M^n 全测地.

定理 4 的证明 对 (3.7) 式两边关于 i 求共变导数, 并求和得

$$\frac{1}{4} \Delta(nH)^2 = - \sum_{\alpha, i, j, k} (h_{ik}^{\alpha} h_{jjki}^{\alpha} + h_{iik}^{\alpha} h_{jjk}^{\alpha}). \quad (3.9)$$

引理 7 [7] 设 M^n 是 CP^{n+p} 中紧致伪脐子流形, 则有

$$\int_{M^n} (\sum_{\alpha, i, j, k} h_{ij}^{\alpha} h_{kkij}^{\alpha}) dV = \int_{M^n} (H \sum_{i, k} h_{iik}^{n+1}) dV = 0.$$

由 M^n 的紧致性, 对 (3.9) 式两边积分, 再由引理 7 得 $\sum_i h_{iik}^{\alpha} = 0, \forall \alpha, k$. 故 M^n 具有平行平均曲率向量.

推论 5 的证明 由定理 4 及推论 3 即得.

参 考 文 献

- [1] 姜国英. 2 - 调和映照及其第一、第二变分公式 [J]. 数学年刊, 1986, 7A(4): 389–402.
- [2] Zhu Yecheng, Song Weidong. 2 -harmonic submanifolds in a complex space form[J]. Journal of Mathematical Research & Exposition, 2008, 28(3): 727–732.
- [3] 沈一兵. 关于复射影空间中的一般极小子流形 [J]. 数学进展, 1986, 15(2): 205–210.
- [4] 尹松庭, 宋卫东. 复射影空间中具有平坦法丛的一般子流形 [J]. 数学物理学报, 2011, 31A(6): 1626–1632.
- [5] 胡显举, 王丽娟, 宋卫东. 复射影空间中的 2 - 调和全实子流形 [J]. 大学数学, 2009, 25(1): 88–91.
- [6] 纪永强. 子流形几何 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.

- [7] 李海忠. 关于伪脐子流形的一个整体定理 [J]. 数学杂志, 1988, 8(2): 161–166.

GENERIC SUBMANIFOLDS WITH 2-HARMONIC IN A COMPLEX PROJECTIVE SPACE

FAN Sheng-xue¹, SONG Wei-dong²

(1. Tongda College, Nanjing University of Posts & Telecommunications, Yangzhou 225127, China)

(2. College of Mathematics and Computer Science, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China)

Abstract: In this paper, the authors study the generic submanifolds with 2-Harmonic in a complex projective space. By method of moving frame, we obtain a pinching theorems of generic submanifolds is minimal and a promotion of J. Simons' type integral inequality. Moreover, the authors also obtain some rigidity theorems of the generic submanifolds with 2-Harmonic and psedu-umbilical and improve the results of the totally real submanifolds with 2-Harmonic in a complex projective space.

Keywords: complex projective space; generic submanifolds; 2-harmonic; psedu-umbilical; parallel mean curvature; totally geodesic

2010 MR Subject Classification: 53C20; 53C40