Vol. 35 (2015)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一般伪黎曼流形中的 2 - 调和类空子流形

周俊东 [1], 宋卫东 [2], 姚云飞 [1]

(1. 阜阳师范学院数学系, 安徽 阜阳 236037)

(2. 安徽师范大学数学系, 安徽 芜湖 241000)

摘 要: 本文研究了一般伪黎曼流形中的 2 - 调和类空子流形的有关性质. 利用活动标架法和 Hopf 原理, 给出了 2 - 调和子流形是极大的几个充分条件, 得到一个 Simons 型积分不等式并推广了相关结果.

关 键 词: 伪黎曼流形; 2 - 调和类空子流形; Simons 型积分不等式; 全测地

MR(2010) **主题分类号**: 53C40; 58E20　　**中 图 分 类 号**: O186.12

文 献 标 识 码: A　　**文 章 编 号**: 0255-7797(2015)04-0927-06

1 引言及主要结果

在子流形几何中, 关于 2 - 调和子流形的研究是一个热门课题. 按 Eells 和 Lemaire [1] 的设想, 姜国英研究了 Riemann 流形间的 2 - 调和的等距映射, 得出 2 - 调和的等距映射的充要条件 [2], 并进一步研究了 Euclid 空间中 2 - 调和等距浸入, 得到的一些不存在性定理 [3]. 伪黎曼流形在物理和数学上都具有重要的研究价值, 欧阳崇珍 [4] 研究了伪黎曼空间型的 2 - 调和类空子流形, 给出 2 - 调和等距浸入的几个等价条件和 2 - 调和超曲面是极大的几个充分条件. 孙弘安 [5] 和钟定兴继续研究了伪黎曼空间型的 2 - 调和类空子流形, 给出这类子流形是全测地的一些充分条件. 局部对称伪黎曼流形是伪黎曼空间型的推广, 宋卫东 [6] 和江桔丽研究了局部对称伪黎曼流形中的 2 - 调和类空子流形, 得出一个积分不等式和一个 Pinching 定理. 独力 [7] 和张娟研究了伪黎曼空间型中的 2 - 调和类空子流形, 主要给出以下定理.

定理 A 设 M^n 是伪黎曼空间型 $N_p^{n+p}(c)(c \geq 0)$ 中的伪脐 2 - 调和类空子流形, 则 M^n 是极大的.

本文研究了一般伪黎曼流形中的 2 - 调和类空子流形, 推广了定理 A, 得到以下几个结果.

定理 1.1 设 N_p^{n+p} 是 $n+p$ 维伪黎曼流形, 其截面曲率 K_N 满足 $0 < \delta \leq K_N \leq 1$, M^n 是 N_p^{n+p} 中 2 - 调和类空子流形, 若 M^n 是伪脐的, 则 M^n 是极大的.

推论 1.1 设 N_p^{n+p} 是 $n+p$ 维伪黎曼流形, 其截面曲率 K_N 满足 $0 < \delta \leq K_N \leq 1$, M^n 是 N_p^{n+p} 中 n 维伪脐 2 - 调和类空子流形, 则 M^n 是紧致的且其数量曲率 $R \geq n(n-1)\delta$, 等号成立当且仅当 M^n 是全测地的.

定理 1.2 设 N_p^{n+p} 是 $n+p$ 维伪黎曼流形, 其截面曲率 K_N 满足 $0 < \delta \leq K_N \leq 1$, M^n 是 N_p^{n+p} 中 2 - 调和类空子流形, 若 M^n 具有平行平均曲率向量, 则 M^n 是极大的.

*收稿日期: 2013-04-14　　接收日期: 2013-07-02

基 金 项 目: 安徽省教育厅自然科学研究基金资助 (KJ2013Z263; KJ2012B134; KJ2011B125; KJ2010A125); 国家特色专业基金资助 (TS11496); 安徽高校省级自然科学研究项目 (2014KJ002).

作者简介: 周俊东 (1983–), 男, 安徽肥东, 讲师, 硕士, 主要研究方向: 子流形几何.

定理 1.3 设 N_p^{n+p} 是 $n+p$ 维伪黎曼流形, 其截面曲率 K_N 满足 $0<\delta\le K_N\le 1$, M^n 是 N_p^{n+p} 中 2 - 调和类空子流形, 若 M^n 是紧致的, 则 M^n 是极大的.

定理 1.4 设 N_p^{n+p} 是 $n+p$ 维伪黎曼流形, 其截面曲率 K_N 满足 $0<\delta\le K_N\le 1$, 若 M^n 是 N_p^{n+p} 中紧致的 n 维 2 - 调和类空子流形, 则成立如下的积分公式

$$0\ge\int_{M^n}\{\frac{1}{p}S^2+n\delta S-\frac{2}{3}(1-\delta)(p-1)\sqrt{n-1}S-\frac{1}{72}(26n-15)n(n-1)p(1-\delta)^2\}^*1,$$

其中 S 是 M^n 第二基本形式模长平方.

2 预备知识

本文采用下面的指标约定:

$$1\le A,B,C,\cdots\le n+p,\ 1\le i,j,k,\cdots\le n,\ n+1\le\alpha,\beta,\gamma,\cdots\le n+p,$$

且重复指标在相应指标范围内求和. 在 N_p^{n+p} 上选取局部伪黎曼正交标架场 $e_1,\cdots,e_{n+p}$, 使得限制在 M^n 上, $e_1,\cdots,e_n$ 是 M^n 的切标架场, $e_{n+1},\cdots,e_{n+p}$ 是 M^n 的法标架场. 设 $\omega_1,\cdots,\omega_{n+p}$ 是所选标架场的对偶标架场, 则 N_p^{n+p} 上的伪黎曼度量为 $d\bar{s}^2=\sum_i\omega_i^2-\sum_\alpha\omega_\alpha^2$. 记 $h=\sum_\alpha h_{ij}^\alpha\omega_i\otimes\omega_j\otimes e_\alpha$ 是 M^n 的第二基本形式, $\overrightarrow{H}=\frac{1}{n}\sum_\alpha(\sum_i h_{ii}^\alpha)e_\alpha$ 是 M^n 的平均曲率向量, 则 M^n 的第二基本形式模长平方 S 和平均曲率 H 的平方分别为

$$S=\sum_{\alpha ij}(h_{ij}^\alpha)^2,H^2=\frac{1}{n^2}\sum_\alpha(\sum_i h_{ii}^\alpha)^2.\tag{2.1}$$

M^n 的 Gauss-Codazzi-Ricci 方程为

$$R_{ijkl}=K_{ijkl}-\sum_\alpha(h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha-h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha),\tag{2.2}$$

$$h_{ijk}^\alpha-h_{ikj}^\alpha=-K_{\alpha ijk},\tag{2.3}$$

$$R_{\alpha\beta kl}=K_{\alpha\beta kl}+\sum_m(h_{km}^\alpha h_{ml}^\beta-h_{lm}^\alpha h_{km}^\beta),\tag{2.4}$$

其中 $R_{ijkl},R_{\alpha\beta kl}$ 是 M^n 的曲率张量和法曲率张量, h_{ijk}^α 是 h_{ij}^α 的共变导数, $K_{ijkl},K_{\alpha ijk},K_{\alpha\beta kl}$ 是 N_p^{n+p} 的曲率张量. M^n 上沿 e_i 方向的 Ricci 曲率 $\mathrm{Ric}(e_i)$ 为

$$\mathrm{Ric}(e_i)=\sum_j K_{ijij}-\sum_\alpha(\sum_j h_{jj}^\alpha)h_{ii}^\alpha+\sum_{\alpha j}(h_{ij}^\alpha)^2.\tag{2.5}$$

定义 h_{ij}^α 的 Laplacian 为 $\triangle h_{ij}^\alpha=\sum\limits_k h_{ijkk}^\alpha$, 其中 h_{ijkk}^α 表示 h_{ij}^α 的二阶共变导数, 根据以上知识, 通过计算得

$$\triangle h_{ij}^\alpha=\sum_k(h_{kkij}^\alpha-K_{\alpha kikj}-K_{\alpha ijkk})+\sum_{mk}h_{km}^\alpha R_{mijk}+\sum_{mk}h_{mi}^\alpha R_{mkjk}+\sum_{\beta k}h_{ki}^\beta R_{\alpha\beta jk}.\tag{2.6}$$

引理 2.1 [4] M^n 是 N_p^{n+p} 中 2 - 调和类空子流形的充要条件是

$$\begin{cases}\sum\limits_{\alpha jk}(-2h_{jjk}^\alpha h_{ik}^\alpha-h_{jj}^\alpha h_{kik}^\alpha+h_{jj}^\alpha K_{\alpha kki})=0,\forall i,\\ \sum\limits_{jk}h_{jjkk}^\alpha+\sum\limits_{\beta jkm}h_{jj}^\beta h_{mk}^\beta h_{mk}^\alpha+\sum\limits_{\beta jk}h_{jj}^\beta K_{\alpha kk\beta}=0,\ \forall\alpha.\end{cases}$$

仿照文献 [8] 证明, 对于伪黎曼流形, 仍有

引理 2.2 [8] 设 N_p^{n+p} 是 $n+p$ 维伪黎曼流形, 其截面曲率 K_N 满足 $\delta\le K_N\le 1$, 则

(i) $|K_{ACBC}|\le \frac{1}{2}(1-\delta), A\ne B$;

(ii) $|K_{ABCD}|\le \frac{2}{3}(1-\delta), A,B,C,D$ 互异.

3 定理的证明

定理 1.1 的证明 设 $\mathrm{tr}H_\alpha=\sum\limits_i h_{ii}^\alpha$, 选取适当的法标架场 e_{n+1}, 使得平均曲率向量 $\overrightarrow{H}=He_{n+1}$, 则

$$\mathrm{tr}H_{n+1}=nH,\mathrm{tr}H_\alpha=0\ \ (\alpha\ge n+2). \tag{3.1}$$

由于 M^n 是 2 - 调和的, 所以由引理 2.1 的第二个方程, 当 $\alpha=n+1$ 时, 得到

$$\sum_{jk}h_{jjkk}^{n+1}+\sum_{jkm}h_{jj}^{n+1}h_{mk}^{n+1}h_{mk}^{n+1}+\sum_{jk}h_{jj}^{n+1}K_{n+1kkn+1}=0.$$

进一步由 (3.1) 式可得

$$\triangle\,(nH)+nH\mathrm{tr}H_{n+1}^2+nH\sum_k K_{n+1kkn+1}=0,$$

N_p^{n+p} 截面曲率为 K_N, 根据截面曲率的定义, 由 e_A,e_B 张成的截面曲率 $K_N(e_A,e_B)$ 为

$$K_N(e_A,e_B)=\frac{K_{ABAB}}{g_{AA}g_{BB}-g_{AB}g_{BA}},$$

所以有

$$\begin{aligned}K_N(e_i,e_j)&=\frac{K_{ijij}}{g_{ii}g_{jj}-g_{ij}g_{ji}}=K_{ijij},\\ K_N(e_\alpha,e_\beta)&=\frac{K_{\alpha\beta\alpha\beta}}{g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta}-g_{\alpha\beta}g_{\beta\alpha}}=K_{\alpha\beta\alpha\beta},\\ K_N(e_\alpha,e_i)&=\frac{K_{\alpha i\alpha i}}{g_{\alpha\alpha}g_{ii}-g_{\alpha i}g_{i\alpha}}=-K_{\alpha i\alpha i},\end{aligned}$$

其中 $g_{\alpha\alpha}=g_{\beta\beta}=-1,g_{ii}=g_{jj}=1,g_{ij}=g_{\alpha\beta}=g_{i\alpha}=0$. 由 N_p^{n+p} 截面曲率 K_N 满足 $0<\delta\le K_N\le 1$ 和 $K_{n+1kkn+1}=K_N(e_{n+1},e_k)$ 可得

$$\triangle\,(nH)=-nH(\mathrm{tr}H_{n+1}^2+\sum_k K_N(e_{n+1},e_k)). \tag{3.2}$$

由 M^n 上的 Codazzi 方程可得

$$h_{jj}^\alpha(h_{kik}^\alpha-h_{kki}^\alpha)=-h_{jj}^\alpha(K_{\alpha kik}), \tag{3.3}$$

把 (3.3) 式代入引理 2.1 的第一个方程得到

$$\sum_{\alpha jk}(2h_{jjk}^\alpha h_{ik}^\alpha+h_{jj}^\alpha h_{kki}^\alpha)=0,\ \forall i, \tag{3.4}$$

又 M^n 是伪脐的, 即

$$h_{ij}^{n+1}=H\delta_{ij}, \tag{3.5}$$

利用 (3.1) 和 (3.5) 式代入 (3.4) 式, 有

$$\sum_{jk}(2h_{jjk}^{n+1}h_{ik}^{n+1}+h_{jj}^{n+1}h_{kki}^{n+1})=\sum_{jk}(2h_{jjk}^{n+1}H\delta_{ik}+h_{jj}^{n+1}h_{kki}^{n+1})=(n+2)H(nH)_i=0,$$

因此有 $H=0$ 或者 $(nH)_i=0,\forall i$, 进一步由 (3.2) 式可得

$$nH(\mathrm{tr}H_{n+1}^2+\sum_k K_N(e_{n+1},e_k))=0,$$

又因为 $\mathrm{tr}H_{n+1}^2\geq 0$, $K_N(e_{n+1},e_k)>0$, 所以 $H=0$, M^n 是极大的.

推论 1.1 的证明 由定理 1.1 可知 M^n 是极大的, 再由 (2.5) 式可得 M^n 上沿 e_i 方向的 Ricci 曲率 $\mathrm{Ric}(e_i)$ 满足

$$\mathrm{Ric}(e_i)=\sum_j K_{ijij}+\sum_{\alpha j}(h_{ij}^{\alpha})^2\geq(n-1)\delta,\forall i. \tag{3.6}$$

由 (3.6) 式可得, M^n 的 Ricci 曲率有正的下界. 由 Bonnet-Myers 定理知, M^n 是紧致的, 另外由 (3.6) 式可得 M^n 数量曲率 $R\geq n(n-1)\delta$, 若 $R=n(n-1)\delta$, 则 M^n 第二基本形式模长平方 $S=0$, 即 M^n 是全测地的, 推论 1.1 得以证明.

定理 1.2 的证明 M^n 是 N_p^{n+p} 中具有平行平均曲率向量的 2 - 调和类空子流形, 即 $\sum\limits_i h_{iik}^{\alpha}=0$. 进一步由 (3.2) 式可得

$$nH(\mathrm{tr}H_{n+1}^2+\sum_k K_N(e_{n+1},e_k))=0,$$

所以 $H=0$, M^n 是极大的.

定理 1.3 的证明 M^n 是 N_p^{n+p} 中紧致的 n 维 2 - 调和类空子流形, 由 (3.2) 式可得

$$\triangle\,(nH)=-nH(\mathrm{tr}H_{n+1}^2+\sum_k K_N(e_{n+1},e_k))\leq 0.$$

由于 M^n 是紧致的, 由 Hopf 引理得

$$-nH(\mathrm{tr}H_{n+1}^2+\sum_k K_N(e_{n+1},e_k))=0,$$

所以 $H=0$, M^n 是极大的.

定理 1.4 的证明 M^n 是 N_p^{n+p} 中紧致的 n 维 2 - 调和类空子流形, 由定理 1.3 可得 M^n 是极大的. 进一步由 (2.6) 式, 通过计算可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\triangle S&=\sum_{\alpha ijk}(h_{ijk}^{\alpha})^2+\sum_{\alpha ij}h_{ij}^{\alpha}\triangle h_{ij}^{\alpha}\\&=\sum_{\alpha ijk}(h_{ijk}^{\alpha})^2-\sum_{\alpha ijk}h_{ij}^{\alpha}(K_{\alpha kikj}+K_{\alpha ijkk})+\sum_{\alpha\beta ijk}K_{\alpha\beta ik}h_{ij}^{\alpha}h_{kj}^{\beta}+\sum_{\alpha\beta}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2\\&\quad+\sum_{\alpha ijkm}h_{ij}^{\alpha}(h_{mj}^{\alpha}K_{mkik}+h_{mk}^{\alpha}K_{mijk})+2\sum_{\alpha\beta}[\mathrm{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2)-\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2].\end{aligned} \tag{3.7}$$

下面估计 (3.7) 式中的各项下界, 首先由于 $(\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta))_{p\times p}$ 是实对称矩阵, 故可选取法标架场 e_α, 使之对角化, 即

$$\sum_{\alpha\beta}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2=\sum_\alpha(\mathrm{tr}H_\alpha^2)^2\geq\frac{1}{p}S^2, \tag{3.8}$$

参照文献 [6] 可得

$$\sum_{\alpha\beta ijk}K_{\alpha\beta ik}h_{ij}^\alpha h_{kj}^\beta\geq-\frac{2}{3}(1-\delta)(p-1)\sqrt{n-1}S, \tag{3.9}$$

$$\sum_{\alpha ijkm}h_{ij}^\alpha(h_{mj}^\alpha K_{mkik}+h_{mk}^\alpha K_{mijk})\geq n\delta S, \tag{3.10}$$

$$2\sum_{\alpha\beta}[\mathrm{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2)-\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2]\geq 0. \tag{3.11}$$

参照文献 [9], 设 $\mathrm{div}\omega=\sum\limits_{ijk\alpha}\nabla_k(h_{ik}^\alpha K_{\alpha jij}+h_{ij}^\alpha K_{\alpha ijk})$, 于是有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha ijk}(h_{ijk}^\alpha)^2-\sum_{\alpha ijk}h_{ij}^\alpha(K_{\alpha kikj}+K_{\alpha ijkk})\\
=\;&\sum_{\alpha ijk}(h_{ijk}^\alpha)^2+\sum_{\alpha ijk}(h_{ikk}^\alpha K_{\alpha jij}+h_{ijk}^\alpha K_{\alpha ijk})-\mathrm{div}\omega\\
=\;&\sum_{\alpha ijk}(h_{ijk}^\alpha+\frac{1}{2}K_{\alpha ijk})^2-\sum_{\alpha ijk}\frac{1}{4}(K_{\alpha ijk})^2+\sum_{\alpha ijk}h_{ikk}^\alpha K_{\alpha jij}-\mathrm{div}\omega\\
\geq\;&-\sum_{\alpha ijk}\frac{1}{4}(K_{\alpha ijk})^2+\sum_{\alpha ijk}h_{ikk}^\alpha K_{\alpha jij}-\mathrm{div}\omega\\
\geq\;&-\frac{1}{8}(1-\delta)^2p(n-1)n-\frac{1}{9}(1-\delta)^2pn(n-1)(n-2)-\frac{1}{4}(1-\delta)^2pn(n-1)^2-\mathrm{div}\omega.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

把 (3.8)–(3.12) 式代入 (3.7) 式, 结合 Green 散度定理和 Stokes 定理得到

$$0\geq\int_{M^n}\{\frac{1}{p}S^2+n\delta S-\frac{2}{3}(1-\delta)(p-1)\sqrt{n-1}S-\frac{1}{72}(26n-15)n(n-1)p(1-\delta)^2\}^*1.$$

参 考 文 献

[1] Eells J L. Selected topics in harmomic map[M]. CBMS 50, AMS, 1983.

[2] 姜国英. Riemann 流形间的 2 - 调和的等距映射 [J]. 数学年刊, 1986, 7A: 130–144.

[3] 姜国英. Euclid 空间中 2 - 调和等距浸入的一些不存在性定理 [J]. 数学年刊, 1987, 8A: 377–383.

[4] 欧阳崇珍. 伪黎曼空间型的 2 - 调和类空子流形 [J]. 数学年刊, 2000, 21A: 649–654.

[5] 孙弘安, 钟定兴. 伪黎曼空间型的 2 - 调和类空子流形 [J]. 数学杂志, 2003, 23(1): 117–120.

[6] 宋卫东, 江桔丽. 关于局部对称伪黎曼流形中的 2 - 调和类空子流形 [J]. 系统科学与数学, 2007, 27(2): 170–176.

[7] 独力, 张娟. 伪黎曼空间型中的 2 - 调和类空子流形 [J]. 数学杂志, 2013, 33(1): 147–152.

[8] Goldberg S I. Curvature and homology[M]. London: Academic Prees, 1962: 92–94.

[9] Xu H W. On closed minimal submanifolds in pinched Riemannian manifolds[J]. Trans. Amer. Math. Soc.,1995, 347(5): 1743–1752.

BIHARMONIC SPACE-LIKE SUBMANIFOLDS IN PSEUDO-RIEMANNIAN MANIFOLD

ZHOU Jun-dong[1], SONG Wei-dong[2], YAO Yun-fei[1]

(*1. Department of Mathematics, Fuyang Normal College, Fuyang 236037, China*)

(*2. Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China*)

Abstract: In this paper, we study biharmonic space-like submanifolds in pseudo-Riemannian manifold. By using moving-frame method and Hopf lemma, we give several sufficient conditions which make biharmonic submanifold turn into maximal submnifold. We obtain integral inequality of Simons'type and improve the known results.

Keywords: pseudo-Riemannian manifold; biharmonic space-like submanifolds; integral inequality of Simons'type; totally geodesic

2010 MR Subject Classification: 53C40; 58E20