

弱次 - ortho - 紧空间的 σ - 积

王建军

(四川农业大学数学系, 四川 雅安 625014)

摘要: 本文研究了具有覆盖性质的弱次 - ortho - 紧空间的 σ - 积问题, 证明存在可数仿紧空间族 $\{X_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ 满足: (1) 空间 $\sigma\{X_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ 的每个有限子乘积是弱次 - ortho - 紧的; (2) 空间 $\sigma\{X_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ 不是弱次 - ortho - 紧的. 利用拓扑空间乘积性理论, 获得了如下结果: 设 $X = \sigma\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ 是 $|A|$ - 仿紧空间. 如果 X 的每个有限子乘积是弱次 - ortho - 紧的, 则 X 也是弱次 - ortho - 紧的. 从而推广了文献 [8] 的结果.

关键词: σ - 积; 弱次 - ortho - 紧; 遗传弱次 - ortho - 紧

MR(2010) 主题分类号: 54B10; 54D20

中图分类号: O189.11

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2016)01-0177-06

1 引言

1959 年, Corson^[1] 首先提出 σ - 积的概念. 随后, Kombarrov 在文献 [2] 中证明仿紧空间具有如下类型的结论.

(*) 假设 $X = \sigma\{X_\alpha : \alpha \in A\}$, 如果 X 的每个有限子乘积是仿紧空间, 则 X 是仿紧的.

基于此, 腾辉、Chiba、蒋继光和朱培勇等分别在文献 [3, 4, 5, 6] 中证明亚紧空间、弱 θ - 可加空间、弱 $\delta\theta$ - 可加空间、亚 - Lindelöf 空间、几乎可膨胀空间以及离散几乎可膨胀空间等都具有类似于 (*) 的结论. 直到 2003 年, Sakai 和 Yajima^[7] 证明次仿紧空间和次亚紧空间也同样具有 (*) 的结果.

鉴于以上用覆盖刻画的拓扑空间族具有 (*) 的良好结论, 不少学者自然会提出下面的问题.

问题 是否所有具有覆盖性质的拓扑空间都满足 (*) 的结论?

遗憾的是, Chiba^[8] 和朱培勇^[9] 分别证明 ortho - 紧空间以及次 ortho - 紧空间对于 (*) 的答案是否定的. 但对于性质更弱、结构更复杂的弱次 - ortho - 紧空间, 至今未见任何有关的结论.

为此, 本文就弱次 - ortho - 紧空间族的 σ - 积进行讨论, 首先证明弱次 - ortho - 紧空间对于 (*) 的结论不成立. 其次证明在 X 是 $|A|$ - 方紧的条件下, 弱次 - ortho - 紧空间对于 (*) 的答案是肯定的. 最后, 证明遗传弱次 - ortho - 紧空间也具有弱次 - ortho - 紧空间类似的结果.

2 基本概念及引理

*收稿日期: 2014-02-21

接收日期: 2014-09-03

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11026081); 四川省教育厅科研项目 (14ZB0007).

作者简介: 王建军 (1981-), 男, 四川华蓥, 讲师, 主要研究方向: 一般拓扑学.

本文所涉及的拓扑空间简称为空间 (用 X 表示). 除特别说明外, 假设 X 都是 Hausdorff 空间. ω (或者 ω_0) 表示最小无限序数以及 ω_1 表示最小不可数序数. 用 $\mathcal{P}(X)$ 表示由空间 X 的所有子空间所构成的集合. 对于 $A \in \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{N}(A)$ ($\text{cl}A$, $\text{int}A$, $|A|$) 分别表示集合 A 的开邻域系 (闭包, 内部和基数). 并且设 $[A]^{<\omega} = \{T \subset A : |T| < \omega\}$. 对于 $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ 以及 $A \subset X$, 设 $(\mathcal{U})_A = \{U \in \mathcal{U} : U \cap A \neq \emptyset\}$, $\text{ord}(A, \mathcal{U}) = |(\mathcal{U})_A|$.

定义 2.1 ^[1] 设 $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ 表示一拓扑空间族且 $s = (s_\alpha)_{\alpha \in A}$ 为乘积空间 $\prod_{\alpha \in A} \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ 的一固定点. 任取

$$x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} \{X_\alpha : \alpha \in A\},$$

令 $Q(x) = \{\alpha \in A : x_\alpha \neq s_\alpha\}$, 则称空间

$$\sigma\{X_\alpha : \alpha \in A\} = \{x \in (x_\alpha)_{\alpha \in A} : |Q(x)| < \omega\}$$

为族 $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ 的 σ -积, 并称 s 为其基点. 另外, 任取 $a \in [A]^{<\omega}$, 称

$$Y_a = \prod_{\alpha \in a} X_\alpha \times \{\{s_\alpha\} : \alpha \in A - \{a\}\}$$

为 $\sigma\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ 的有限子乘积.

定义 2.2 ^[10] 称空间 X 是 ortho-紧的, 如果 X 的每个开覆盖都存在内部保持的开加细. 称空间 X 的开覆盖 $\mathcal{V}$ 是内部保持的, 如果对 $\mathcal{V}$ 的任意子族 $\mathcal{V}'$ 满足 $\text{int} \cap \mathcal{V}'$ 开于 X .

定义 2.3 ^[10] 称空间 X 是弱次-ortho-紧的, 如果 X 的每个开覆盖 $\mathcal{U}$, 存在开加细 $\cup_{n \in \omega} \mathcal{V}_n$ 使得: 任取 $x \in X$, 存在 $n \in \omega$, 合于 $\text{int} \cap (\mathcal{V}_n)_x \in \mathcal{N}(x)$.

引理 2.4 ^[11] 空间 X 是 κ -仿紧的当且仅当 X 的每个开覆盖 (基数 $\leq \kappa$), 存在局部有限的开加细.

引理 2.5 ^[12] 空间 X 是 κ -弱次亚紧的当且仅当 X 的每个开覆盖 $\mathcal{U}$ (基数 $\leq \kappa$), 存在 $\mathcal{U}$ 的开加细 $\cup_{n \in \omega} \mathcal{V}_n$ 使得: 任取 $x \in X$, 存在 $n \in \omega$, 合于 $\text{ord}(x, \mathcal{V}_n) = 1$.

3 主要定理

陈述主要定理之前, 我们先引入如下引理.

引理 3.1 设 Y 是正则空间且存在点 $y \in Y$ 和族 $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}(y)$, 使得对任意 $\mathcal{W} \in [\mathcal{V}]^{\geq \omega}$, 恒有 $y \notin \text{int} \cap \mathcal{W}$. 如果 $X \times Y$ 是弱次-ortho-紧空间, 则 X 是弱次亚紧的.

证 设族 $\mathcal{G}$ 是 X 的任意开覆盖. 易证族 $\mathcal{G}^* = \{G \times \{y\} : G \in \mathcal{G}\}$ 是 $X \times \{y\}$ 的开覆盖. 令 $\mathcal{H} = \{G \times V : G \in \mathcal{G}, V \in \mathcal{V}\}$, 则存在 $O \in \mathcal{N}(y)$ 使得 $X \times \text{cl}O \subset \cup \mathcal{H}$. 由于 $X \times \text{cl}O$ 是 $X \times Y$ 的闭子空间, 因此存在 $\mathcal{H}$ 的开加细 $\cup_{n \in \omega} \mathcal{U}_n$, 使得任取 $x \in X$, 存在 $n \in \omega$ 合于: $\cap (\mathcal{U}_n)_{(x,y)} = \text{int}(\cap (\mathcal{U}_n)_{(x,y)})$.

取定 $n \in \omega$. 令 $\mathcal{W}_n = \{U \cap (X \times \{y\}) : U \in \mathcal{U}_n\}$, 则以下结论成立.

- (1) $\cup_{n \in \omega} \mathcal{W}_n$ 是 $\mathcal{G}^*$ 的开加细;
- (2) 任取 $x \in X$, 存在 $n \in \omega$, 使得 $\text{ord}((x, y), \mathcal{W}_n) < \omega$.

事实上, 容易证明对任意 $n \in \omega$, 集族 $\mathcal{W}_n$ 是 $\mathcal{G}^*$ 的部分开加细且 $\cup_{n \in \omega} \mathcal{W}_n = \mathcal{G}^*$. 接下来只需证明结论 (2) 成立. 取定 $x \in X$. 由 $X \times \text{cl}O$ 的弱次 - ortho - 紧性, 存在 $n_x \in \omega$ 满足

$$\begin{aligned}(x, y) &\in \cap(\mathcal{W}_{n_x})_{(x, y)} \subset \cap(\mathcal{U}_{n_x})_{(x, y)} \\ &= \text{int}(\cap(\mathcal{U}_{n_x})_{(x, y)}) \subset X \times \text{int}(\cap\{V(U) : U \in (\mathcal{U}_{n_x})_{(x, y)}\}).\end{aligned}$$

因此, 断定 $\text{ord}((x, y), \mathcal{W}_{n_x}) < \omega$ 成立. 否则与引理中条件 $y \notin \text{int} \cap\{V(U) : U \in (\mathcal{U}_n)_{(x, y)}\}$ 矛盾.

根据结论 (1) 和 (2), 空间 $X \times \{y\}$ 是弱次亚紧的. 因为 $X \times \{y\}$ 同胚于 X , 所以 X 是也弱次亚紧的.

利用引理 3.1 的结论, 容易得到下面的例子.

例 3.2 存在 T_2 , 正规的可数仿紧空间族 $\{X_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ 合于:

- (i) 集族 $\{X_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ 的任意有限子乘积是弱次 - ortho - 紧的.
- (ii) 集族 $\{X_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ 的 σ - 积 $\sigma\{X_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ 不是弱次 - ortho - 紧的.

证 对任意的 $\alpha \in \omega_1$, 令 $X_\alpha = \omega_1$. 参见文献 [13], 显然每个 X_α 是 T_2 , 正规的可数仿紧空间并且集族 $\{X_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ 的任意有限子乘积是弱次 - ortho - 紧的. 接下来, 只需证明 (ii) 为真. 定义 $\Sigma = \omega_1 - \{0\}$ 且令 $Y = \sigma\{X_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$. 因此, $s = (s_\alpha^*)_{\alpha \in \Sigma}$ 是空间 Y 的一个基点 (其中不妨假设每个 $s_\alpha^* = \omega$). 同时, 容易证明 $\sigma\{X_\alpha : \alpha \in \omega_1\} = \omega_1 \times Y$.

任取 $n \in \omega$, $\alpha \in \Sigma$, 令

$$V(n, \alpha) = (\prod_{\beta \leq \alpha} (n, \omega] \times \prod_{\beta > \alpha} X_\beta) \cap Y.$$

容易验证, 集族 $\mathcal{V} = \{V(n, \alpha) : (n, \alpha) \in \omega \times \Sigma\}$ 是基点 s 的一邻域系且满足 $|\mathcal{V}| \geq \omega$. 取定适合于 $|\Lambda| \geq \omega$ 的子集 $\Lambda \subset \omega \times \Sigma$. 设 $\mathcal{W} = \{V(n, \alpha_\delta) : n \in \omega, \delta \in \Gamma\}$ 且满足 $|\Gamma| = |\Lambda|$. 因此有如下断言:

断言 1 $s \notin \text{int} \cap \mathcal{W}$.

如若不然, 假设 $s \in \text{int} \cap \mathcal{W}$. 现在, 对以下两种情形进行讨论.

情形 1 取定 $n_0 \in \omega$. 任取 $\Xi \subset \Gamma$ 且满足 $|\Xi| \geq \omega$. 令 $\mathcal{W}_{n_0} = \{V(n_0, \alpha) : \alpha \in \Xi\}$. 由于

$$s \in \text{int} \cap \mathcal{W} \subset \text{int} \cap \mathcal{W}_{n_0} \subset \text{int}[(\prod_{\beta \leq \omega} (n_0, \omega] \times \prod_{\beta > \omega} X_\beta) \cap Y],$$

因此存在 Y 中的标准基元 $G = \cap_{i=1}^k p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$, 使得

$$s \in G \subset \prod_{\beta \leq \omega} (n_0, \omega] \times \prod_{\beta > \omega} X_\beta.$$

进而, 若 $\alpha \in \Xi - \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, 有 $X_\alpha \not\subseteq (n_0, \omega]$. 显然矛盾.

情形 2 取定 $\alpha_0 \in \Sigma$. 任取满足 $|\Delta| \leq \omega$ 的子集 $\Delta \subset \omega$. 设 $\mathcal{W}_{\alpha_0} = \{V(n, \alpha_0) : n \in \Delta\}$. 由于

$$s \in \text{int} \cap \mathcal{W}_{\alpha_0} \subset \text{int}[(\prod_{\beta \leq \alpha_0} \{\omega\} \times \prod_{\beta > \alpha_0} X_\beta) \cap Y],$$

因此存在 Y 中的标准基元 $H = \cap_{i=1}^m p_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i})$, 使得

$$s \in H \subset \prod_{\beta \leq \alpha_0} \{\omega\} \times \prod_{\beta > \alpha_0} X_\beta.$$

因此这与 $\{\omega\}$ 不是 ω_1 的开子集矛盾.

鉴于情形 1 和情形 2, 断言 1 为真. 因此容易验证基点 s 和集族 $\mathcal{V}$ 满足引理 3.1 的条件. 进而, 假设 $\omega_1 \times Y$ 是弱次 - ortho - 紧的, 则 ω_1 是弱次亚紧的. 这与 ω_1 不是弱次亚紧矛盾. 所以假设不成立. 也即 (ii) 的结论为真.

根据例 3.2, 弱次 - ortho - 紧空间族不满足 (*) 型的结论. 接下来, 将通过下面定理说明当 σ - 积 X 是 $|A|$ - 仿紧空间的时候, 弱次 - ortho - 紧空间族具有类似于 (*) 的结果.

定理 3.3 设 $X = \sigma\{X_\alpha : \alpha \in A\}$, 且 X 是 $|A|$ - 仿紧空间. 如果集族 $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ 的任意有限子乘积是弱次 - ortho - 紧的, 则 X 也是弱次 - ortho - 紧的.

证 设集族 $\mathcal{U} = \{U_\xi : \xi \in \Xi\}$ 是空间 X 的任意开覆盖并且令 $A^* = [A]^{<\omega}$. 取定 $a \in A^*$ 和 $\xi \in \Xi$, 令

$$V_{a,\xi} = \cup\{V : V \text{ 开于 } Y_a, p_a^{-1}(V) \subset U_\xi\} \text{ 且 } V_a = \cup\{V_{a,\xi} : \xi \in \Xi\},$$

其中 $p_a : X \mapsto Y_a$ 具有如下定义: 任取 $x = (x)_\alpha \in A$,

$$(P_a(x))_\alpha = \begin{cases} x_\alpha, & \alpha \in a, \\ s_\alpha, & \alpha \in A - \{a\}. \end{cases}$$

容易证明集族 $\{p_a^{-1}(V_a) : a \in A^*\}$ 是空间 X 的定向开覆盖. 由于空间 X 是 $|A|$ - 仿紧的, 因此根据引理 2.4, 存在 X 的局部有限开集族 $\{B_a : a \in A^*\}$ 合于: 对任意 $a \in A^*$, $B_a \subset p_a^{-1}(V_a)$. 再令 $\Lambda = [A^*]^{<\omega}$, 任取 $\lambda \in \Lambda$, 令

$$E_\lambda = X - \cup\{\text{cl}B_a : a \in A^* - \{\lambda\}\}.$$

显然, 集族 $\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是 X 的开集覆盖且 $\text{cl}E_\lambda \subset p_{a_\lambda}^{-1}(V_{a_\lambda})$ (其中, $a_\lambda = \cup\{a : a \in \lambda\}$).

任取 $\lambda \in \Lambda$, 令 $D_{a_\lambda} = Y_{a_\lambda} - p_{a_\lambda}(X - \text{cl}E_\lambda)$ 且 $T_\lambda = \text{int}p_{a_\lambda}^{-1}(D_{a_\lambda})$. 类似于定理 2.2^[14] 的方法, 容易证明 $\cup\{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\} = X$. 由于 X 是 $|A|$ - 弱次亚紧的, 则存在 X 内的开集族 $\cup_{m \in \omega} \mathcal{G}_m$ (其中 $\mathcal{G}_m = \{G_{m,\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$), 合于

- (1) 任取 $m \in \omega$, $\lambda \in \Lambda$, 有 $G_{m,\lambda} \subset T_\lambda$;
- (2) 任取 $x \in X$, 存在 $m \in \omega$, 使得 $\text{ord}(x, \mathcal{G}_m) = 1$.

由于 D_{a_λ} 闭于 Y_{a_λ} 且 $D_{a_\lambda} \subset \cup\{V_{a_\lambda,\xi} : \xi \in \Xi\}$, 因此存在 $\{V_{a_\lambda,\xi} : \xi \in \Xi\}$ 的开加细 $\cup_{n \in \omega} \mathcal{W}_{n,a_\lambda}$, 合于

- (3) 任取 $y \in D_{a_\lambda}$, 存在 $n \in \omega$ 以及 $V \in \mathcal{N}_{D_{a_\lambda}}(y)$ 使得 $V \subset \cap(\mathcal{W}_{n,a_\lambda})_y$.

鉴于此, 任取 $n \in \omega$, 令

$$\mathcal{H}_{m,n} = \{p_{a_\lambda}^{-1}(W) \cap G_{m,\lambda} : \lambda \in \Lambda, W \in \mathcal{W}_{n,a_\lambda}\}.$$

因此断定下面的结论成立.

- (4) 集族 $\cup_{m,n \in \omega} \mathcal{H}_{m,n}$ 是 $\mathcal{U}$ 的开加细.
- (5) 任取 $x \in X$, 存在 $(m,n) \in \omega \times \omega$, 使得 $\cap(\mathcal{H}_{m,n})_x \in \mathcal{N}(x)$.

事实上, 根据 $\mathcal{H}_{m,n}$ 的定义, 结论 (4) 显然成立. 接下来, 证明结论 (5) 为真. 取定 $x \in X$. 由 (2), 存在 $m \in \omega$, 使得 $\text{ord}(x, \mathcal{G}_m) = 1$. 取 $G_{m,\lambda_0} \in (\mathcal{G}_m)_x$. 由于 $\lambda_0 \in \Lambda$, 因此 $x_{a_{\lambda_0}} \in D_{a_{\lambda_0}}$.

进而根据 (3), 存在 $n \in \omega$ 以及 $V \in \mathcal{N}_{D_{a_{\lambda_0}}}(x_{a_{\lambda_0}})$ 合于 $V \subset \cap(\mathcal{W}_{n,a_{\lambda_0}})_{x_{a_{\lambda_0}}}$. 根据以上讨论, 显然有

$$\begin{aligned} x &\in p_{a_{\lambda_0}}^{-1}(V) \cap G_{m,\lambda_0} \subset [p_{a_{\lambda_0}}^{-1}(\cap(\mathcal{W}_{n,a_{\lambda_0}})_{x_{a_{\lambda_0}}}) \cap G_{m,\lambda_0}] \\ &= \cap\{p_{a_{\lambda_0}}^{-1}(W) \cap G_{m,\lambda_0} : W \in \mathcal{W}_{n,a_{\lambda_0}}\}_x = \cap(\mathcal{H}_{m,n})_x. \end{aligned}$$

所以结论 (5) 为真.

综上, 根据结论 (4) 和 (5), X 也是弱次 - ortho - 紧空间.

称空间 X 是遗传弱次 - ortho - 紧的, 如果 X 的任意子空间是弱次 - ortho - 紧的. 根据其定义, 不难证明空间 X 是遗传弱次 - ortho - 紧的当且仅当 X 的任意开子空间是弱次 - ortho - 紧的. 接下来, 将证明遗传弱次 - ortho - 紧空间族具有弱次 - ortho - 紧空间族的类似结果.

引理 3.4 假设 $X = \sigma\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ 的开子空间 G 是 $|A|$ - 弱次亚紧的. 如果集族 $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ 的每个有限子乘积是遗传弱次 - ortho - 紧的, 则空间 G 是弱次 - ortho - 紧的.

证 设集族 $\mathcal{U} = \{U_\xi : \xi \in \Xi\}$ 为开子空间 G 的任意开覆盖且令 $A^* = [A]^{<\omega}$. 任取 $a \in A^*$, $\xi \in \Xi$, 设

$$V_{a,\xi} = \cup\{V : V \text{ 开于 } Y_a, p_a^{-1}(V) \cap G \subset U_\xi\} \text{ 且 } V_a = \cup\{V_{a,\xi} : \xi \in \Xi\},$$

其中, 映射 p_a 与定理 3.3 中的定义类似. 容易证明集族 $\{p_a^{-1}(V_a) : a \in A^*\}$ 是空间 G 的定向开覆盖. 由于空间 G 是 $|A|$ - 弱次亚紧的, 则存在集族 $\{p_a^{-1}(V_a) : a \in A^*\}$ 的开加细 $\cup_{n \in \omega} \mathcal{W}_n$ (其中 $\mathcal{W}_n = \{W_{n,a} : a \in A^*\}$), 合于

(1) 任取 $x \in G$, 存在 $n \in \omega$, 使得 $\text{ord}(x, \mathcal{W}_n) = 1$.

取定 $a \in A^*$. 由于空间 X_a 是遗传弱次 - ortho - 紧的且 $V_a = \cup\{V_{a,\xi} : \xi \in \Xi\}$, 则存在集族 $\{V_{a,\xi} : \xi \in \Xi\}$ 的开加细 $\cup_{m \in \omega} \mathcal{A}_{m,a}$ 合于

(2) 任取 $y \in V_a$, 存在 $m \in \omega$, 使得 $\cap(\mathcal{A}_{m,a})_y \in \mathcal{N}_{V_a}(y)$.

取定 $m, n \in \omega$. 令

$$\mathcal{H}_{m,n} = \{p_a^{-1}(B) \cap W_{n,a} : B \in \mathcal{A}_{m,a}, a \in A^*\}.$$

类似于定理 3.3 的证明方法, 容易得到如下结论:

(3) $\cup_{m,n \in \omega} \mathcal{H}_{m,n}$ 是 $\mathcal{U}$ 的开加细.

(4) 任取 $x \in G$, 存在 $(m, n) \in \omega \times \omega$, 使得 $\cap(\mathcal{H}_{m,n})_x \in \mathcal{N}_G(x)$.

根据 (3) 和 (4) 的结论, 空间 G 是弱次 - ortho - 紧的.

由引理 3.4, 可直接得到下面的定理.

定理 3.5 设 $X = \sigma\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ 是遗传 $|A|$ - 弱次亚紧空间. 如果集族 $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ 的每个有限子乘积是遗传弱次 - ortho - 紧的, 则空间 X 是遗传弱次 - ortho - 紧的.

证 设 G 是空间 X 的任意开子空间, 根据引理 3.4, G 是弱次 - ortho - 紧的. 进而, 空间 X 是遗传弱次 - ortho - 紧的.

参 考 文 献

- [1] Corson H H. Normality in subsets of product spaces[J]. Amer. J. Math., 1959, 81: 785–796.
- [2] Kombarov A P. On the normality of Σ_m -products[J]. Soviet. Math. Dokl., 1973, 14: 1050–1053.
- [3] Teng H. On σ -products spaces I[J]. Math. Japonica., 1991, 36: 515–522.
- [4] Chiba K. Covering properties in σ -products[J]. Math. Jap., 1994, 39: 343–352.
- [5] Jiang J. Some properties of σ -products[J]. Chin. Ann. Math., 1993, 14B:47–54.
- [6] Zhu P. The products of metalindelöf spaces[J]. Topo. Proc., 1993, 18: 221–229.
- [7] Sakay M, Yajima Y. Subparacompactness and submetacompactness of σ -products[J]. Topo. Appl., 2003, 129: 153–158.
- [8] Chiba K. The strong paracompactness of σ -products[J]. Sci. Math., 1999, 2: 285–292.
- [9] 朱培勇. 强次亚紧和遗传次亚紧的 σ -积 [J]. 四川大学学报 (自然科学版), 1997, 2: 128–131.
- [10] Kemoto N, Yajima Y. Orthocompatness in finite product spaces[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1994, 2: 591–596.
- [11] Yasui Y. Generalized paracompactness[M]. Morita K, Nagata. J Eds., Topics in General Topology, North-Holland: Elsevier Science Publishers, 1989.
- [12] Bennett H R, Lutzer D J. A note on weak θ -refiability[J]. Gene. Topo. Appl., 1972, 2: 49–54.
- [13] Scott B M. More about orthocompatness[J]. Topo. Proc., 1980, 5: 155–184.
- [14] Wang J, Zhu P. On products of property b_1 [J]. J. Math. Appl., 2012, 32(2): 241–247.

THE WEAKLY SUBORTHOCOMPACTNESS OF σ -PRODUCTS

WANG Jian-jun

(Department of Mathematics, Sichuan Agricultural University, Yaan 625014, China)

Abstract: In this paper, we discuss the σ -products of weakly suborthocompact spaces characterized by covering. We present that there exists a collection of countably paracompact spaces $\{X_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ such that: (1) Each finite subproduct of $\sigma\{X_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ are weakly suborthocompact; (2) The space $\sigma\{X_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ is not weakly suborthocompact. Finally, by using the products of topological spaces, we prove that if $X = \sigma\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ is a $|A|$ -paracompact space with every finite subproduct of X being weakly suborthocompact, then X is weakly suborthocompact, which generalizes the result in [8].

Keywords: σ -product; weakly suborthocompact; hereditary weakly suborthocompact

2010 MR Subject Classification: 54B10; 54D20