Vol. 36 (2016)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

含临界指数 p-Kirchhoff 型方程的非平凡解

刘 琼

(湖北工程学院数学与统计学院, 湖北 孝感 432000)

摘 要: 本文研究了一类含临界指数的 p-Kirchhoff 型方程. 利用变分方法与集中紧性原理, 通过证明对应的能量泛函满足局部的 $(PS)_c$ 条件, 得到了这类方程非平凡解的存在性, 推广了关于 Kirchhoff 型方程的相关结果.

关键词: p-Kirchhoff 型方程; $(PS)_c$ 条件; 临界指数; 非平凡解

MR(2010) **主题分类号:** 35J62; 35B33 **中图分类号:** O175.25

文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2016)01-0157-07

1 引言及主要结果

本文研究如下一类含 Sobolev 临界指数的 p-Kirchhoff 型方程

$$\begin{cases} -M\Big(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx\Big)\Delta_p u = |u|^{p^*-2}u + \lambda f(u),\ x\in\Omega, \\ u(x)=0,\ x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 为一光滑有界区域, $1<p<N$, $\Delta_p u$ 为 p-Laplacian 算子, $p^*=\frac{Np}{N-p}$ 是 Sobolev 临界指数, $\lambda>0$ 为实参数. $M:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为连续函数且满足如下条件:

$(\mathcal{H}_1)$ 存在 $M_0>0$, 使得对任意 $t\geq 0$ 有, $M(t)\geq M_0$;

$(\mathcal{H}_2)$ 存在 $\theta>\frac{p}{p^*}$, 使得对任意 $t\geq 0$ 有, $\widetilde{M}(t)\geq\theta M(t)t$, 其中 $\widetilde{M}(t)=\displaystyle\int_0^t M(s)ds$;

$(\mathcal{H}_3)$ $\lim\limits_{|u|\to 0}\frac{f(u)}{|u|^{p-1}}=0$;

$(\mathcal{H}_4)$ 存在 $q\in(p,p^*)$, 使得 $\lim\limits_{|u|\to+\infty}\frac{f(u)}{|u|^{q-1}}=0$.

$(\mathcal{H}_5)$ 存在 $\mu\in(\frac{p}{\theta},p^*)$, 使得对任意 $u\neq 0$ 有, $0<\mu F(u)\leq uf(u)$, 其中 $F(u)=\displaystyle\int_0^u f(s)ds$, θ 为 $(\mathcal{H}_2)$ 中所给出.

近年来, Kirchhoff 型方程

$$\begin{cases} -\Big(a+b\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\Delta u = f(x,u),\ x\in\Omega, \\ u=0,\ x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

由于其广泛的应用而引起了许多数学研究者的注意. 例如文 [1–2] 研究了方程 (1.2) 正解的存在性; 文 [3–4] 得到了方程 (1.2) 无穷多个正解的存在性; 文 [5] 研究了方程 (1.2) 非平凡解

*收稿日期: 2013-09-18 接收日期:2014-01-08

基金项目: 湖北省教育厅科研计划重点项目 (D20122605; D20142702) 资助.

作者简介: 刘琼 (1980–), 女, 湖北广水, 讲师, 硕士, 主要研究方向: 偏微分方程.

与变号解的存在性; 文 [6] 考虑了方程 (1.2) 多重非平凡解的存在性. 其它相关的结果见文献 [7–10]. 本文考虑更一般的含 Sobolev 临界指数的 p-Kirchhoff 型方程 (1.1), 讨论方程 (1.1) 非平凡解的存在性. 由于方程 (1.1) 包含临界指数使得嵌入 $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ 非紧, 这给我们利用变分方法带来了困难. 将利用 Lions 的集中紧性原理 (文 [11]) 通过对 (PS) 序列的仔细分析, 选择恰当的能量水平使得局部的 $(\mathrm{PS})_c$ 条件成立.

定义最佳常数

$$\mathcal{S} = \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{(\int_\Omega |u|^{p^*} dx)^{\frac{p}{p^*}}}. \tag{1.3}$$

本文的主要结果为

定理 1.1　若条件$(\mathcal{H}_1)$–$(\mathcal{H}_5)$满足, 则存在 $\Lambda > 0$, 使得当 $\lambda \geq \Lambda$ 时, 方程 (1.1) 至少存在一个能量水平于 $\Big(0, (\frac{1}{\mu} - \frac{1}{p^*})(M_0\mathcal{S})^{\frac{N}{p}}\Big)$ 的非平凡解.

注 1　若令 $M(t) = a + bt$, 其中 a, b 为正的常数. 则 $M(t) \geq a$ 且

$$\widetilde{M}(t) = \int_0^t M(s)ds = \int_0^t (a + bs)ds = at + \frac{1}{2}bt^2 \geq \frac{1}{2}(a + bt)t = \theta M(t)t,$$

其中 $\theta = \frac{1}{2}$. 从而条件 $(\mathcal{H}_1)$–$(\mathcal{H}_2)$ 满足. 若令 $f(u) = \sum\limits_{i=1}^{k} |u|^{q_i-2}u$, 其中 $k \geq 1, 2p < q_i < p^*$, 易知条件 $(\mathcal{H}_3)$–$(\mathcal{H}_5)$ 满足.

2　主要结果的证明

在整篇文章中, C, C_i 表示正的常数它们在不同的行或段中可以不同; “$\to$” 表示强收敛, “$\rightharpoonup$” 表示弱收敛; $W_0^{1,p}(\Omega)$ 表示通常的 Sobolev 空间, 其范数为 $\|u\| = (\int_\Omega |\nabla u|^p dx)^{\frac{1}{p}}$; $|u|_p := \big(\int_\Omega |u|^p dx\big)^{\frac{1}{p}}$ 表示 Lebesgue 空间 $L^p(\Omega)$ 的范数.

方程 (1.1) 对应的能量泛函定义为

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{p}\widetilde{M}(\|u\|^p) - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*} dx - \lambda \int_\Omega F(u)dx, \tag{2.1}$$

由条件 $(\mathcal{H}_1)$–$(\mathcal{H}_5)$ 易知 $\mathcal{E}(u) \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, 从而方程 (1.1) 的非平凡解等价于能量泛函 $\mathcal{E}(u)$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 上的非零临界点.

首先我们证明能量泛函 $\mathcal{E}(u)$ 具有山路几何.

引理 2.1　若 $(\mathcal{H}_1)$–$(\mathcal{H}_5)$ 成立, 则

(i) 存在 $\rho, \alpha > 0$ 使得 $\mathcal{E}(u)\big|_{\|u\|=\rho} \geq \alpha > 0$.

(ii) 对任意 $\lambda > 0$, 存在独立于 λ 的非负函数 $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 满足 $\|u_0\| > \rho$, 使得 $\mathcal{E}(u_0) < 0$.

证　(i) 由 $(\mathcal{H}_3)$ 与 $(\mathcal{H}_4)$ 知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $C_\varepsilon > 0$, 使得对任意 $u \in \mathbb{R}$ 有

$$F(u) \leq \frac{\varepsilon}{p}|u|^p + \frac{C_\varepsilon}{q}|u|^q. \tag{2.2}$$

根据 $(\mathcal{H}_1)$ 及 Sobolev 嵌入定理可得

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u) &\geq \frac{M_0}{p}\|u\|^p - C_1\|u\|^{p^*} - \lambda C_2\varepsilon\|u\|^p - \lambda C_3\|u\|^q \\ &= \big(\frac{M_0}{p} - \lambda C_2\varepsilon\big)\|u\|^p - C_1\|u\|^{p^*} - \lambda C_3\|u\|^q.\end{aligned}$$

取 $\varepsilon = \frac{M_0}{2p\lambda C_2}$, 则

$$\mathcal{E}(u) \geq \frac{M_0}{2p}\|u\|^p - C_1\|u\|^{p^*} - \lambda C_3\|u\|^q. \tag{2.3}$$

由于 $q \in (p, p^*)$, 从而由 (2.3) 式知, 存在 $\rho > 0, \alpha > 0$ 使得 $\mathcal{E}(u)\big|_{\|u\|=\rho} \geq \alpha$.

(ii) 取非负函数 $\phi_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ 且满足 $\|\phi_0\| = 1$. 结合条件 $(\mathcal{H}_2)$, 对任意 $t \geq t_0 > 0$ 可得

$$\widetilde{M}(t) \leq \frac{\widetilde{M}(t_0)}{t_0^{\frac{1}{\theta}}} t^{\frac{1}{\theta}} = C_0 t^{\frac{1}{\theta}}. \tag{2.4}$$

由 $(\mathcal{H}_5)$ 知, $\displaystyle\int_\Omega F(t\phi_0)dx \geq 0$. 因此对任意 $t \geq t_0$ 有

$$\mathcal{E}(t\phi_0) \leq \frac{C_0}{p} t^{\frac{p}{\theta}} - \frac{t^{p^*}}{p^*}\int_\Omega \phi_0^{p^*} dx.$$

又由于 $\frac{p}{\theta} < p^*$, 所以可以选取 $t^* > 0$ 充分大, 并令 $u_0 = t^*\phi_0$ 则可满足引理要求.

引理 2.2 若 $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ 为 $\mathcal{E}$ 的 $(\mathrm{PS})_c$ 序列, 则 $\{u_n\}$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中有界.

证 设 $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ 为 $\mathcal{E}$ 的 $(\mathrm{PS})_c$ 序列, 即

$$\mathcal{E}(u_n) \to c, \qquad \mathcal{E}'(u_n) \to 0, \tag{2.5}$$

从而由 $(\mathcal{H}_5)$ 对充分大的 n, 及 $(\mathcal{H}_1)$ 与 $(\mathcal{H}_2)$ 可得

$$\begin{aligned} c + o_n(1) &\geq \mathcal{E}(u_n) - \frac{1}{\mu}\langle \mathcal{E}'(u_n), u_n\rangle \\ &\geq \frac{1}{p}\widetilde{M}(\|u\|^p) - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^p)\|u_n\|^p \geq \big(\frac{\theta}{p} - \frac{1}{\mu}\big)M_0\|u_n\|^p, \end{aligned} \tag{2.6}$$

又由于 $\mu > \frac{p}{\theta}$, 所以 $\{u_n\}$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中有界.

引理 2.3 若 $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ 为 $\mathcal{E}$ 的 $(\mathrm{PS})_c$ 序列, 若 $c < (\frac{1}{\mu} - \frac{1}{p^*})(M_0\mathcal{S})^{\frac{N}{p}}$, 则 $\{u_n\}$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中存在强收敛的子列.

证 由引理 2.2 知 $\{u_n\}$ 有界, 因此, 可以假设 (必要时可以取子列)

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u & \text{在} W_0^{1,p}(\Omega), \\ u_n \to u & \text{在} L^s(\Omega),\ 1 \leq s < p^*, \\ u_n \to u & \text{a.e. 在 } \Omega, \\ |\nabla u_n|^p \rightharpoonup \vartheta, \\ |u_n|^{p^*} \rightharpoonup \nu, \end{cases} \tag{2.7}$$

其中 ϑ 与 ν 为 $\overline{\Omega}$ 上非负有界测度. 则由 Lions 集中紧性原理 (文 [11]) 知, 存在至多可数集 J 使得

$$\begin{cases} \nu = |u|^{p^*} + \sum\limits_{j\in J}\nu_j\delta_{x_j}, \quad \nu_j > 0, \\ \vartheta \geq |\nabla u|^p + \sum\limits_{j\in J}\vartheta_j\delta_{x_j}, \quad \vartheta_j > 0, \\ \mathcal{S}\nu_j^{\frac{p}{p^*}} \leq \vartheta_j, \end{cases} \tag{2.8}$$

这里 δ_{x_j} 为 Dirac 测度集中在点 $x_j \in \overline{\Omega}$.

取 $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ 使得 $0 \le \psi(x) \le 1$; $\psi(x) = 1$, 若 $|x| < 1$; $\psi(x) = 0$, 若 $|x| \ge 2$, 且 $|\nabla\psi| \le 2$. 对 $\varepsilon > 0$ 与 $j \in J$, 记 $\psi_\varepsilon^j(x) = \psi((x - x_j)/\varepsilon)$. 由于 $\mathcal{E}'(u_n) \to 0$ 且 $\{\psi_\varepsilon^j u_n\}$ 有界, $\langle \mathcal{E}'(u_n), \psi_\varepsilon^j u_n\rangle \to 0$ $(n \to \infty)$, 所以有

$$
\begin{aligned}
& M(\|u_n\|^p)\int_\Omega |\nabla u_n|^p \psi_\varepsilon^j dx \\
=& - M(\|u_n\|^p)\int_\Omega u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\psi_\varepsilon^j dx \\
& + \int_\Omega |u_n|^{p^*}\psi_\varepsilon^j dx + \lambda\int_\Omega f(u_n)u_n\psi_\varepsilon^j dx + o_n(1).
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

由 (2.8) 式与 Vitali 定理, 可得

$$
\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n\nabla\psi_\varepsilon^j|^p dx = \int_\Omega |u\nabla\psi_\varepsilon^j|^p dx,
$$

因此, 由 Hölder 不等式可得

$$
\begin{aligned}
& \limsup_{n\to\infty}\left|\int_\Omega u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\psi_\varepsilon^j dx\right| \\
\le& \limsup_{n\to\infty}\Big(\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx\Big)^{\frac{p-1}{p}}\Big(\int_\Omega |u_n\nabla\psi_\varepsilon^j|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\
\le& C_4\Big(\int_{B(x_j,2\varepsilon)} |u|^p|\nabla\psi_\varepsilon^j|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\
\le& C_4\Big(\int_{B(x_j,2\varepsilon)} |\nabla\psi_\varepsilon^j|^N dx\Big)^{\frac{1}{N}}\Big(\int_{B(x_j,2\varepsilon)} |u|^{p^*} dx\Big)^{\frac{1}{p^*}} \\
\le& C_5\Big(\int_{B(x_j,2\varepsilon)} |u|^{p^*} dx\Big)^{\frac{1}{p^*}} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

另一方面, 由 (2.8) 式可得 $f(u_n)u_n \to f(u)u$ a.e. 在 Ω 中, 且 $u_n \to u$ 在 $L^p(\Omega)$ 与 $L^q(\Omega)$ 中. 由 $(\mathcal{H}_3)$–$(\mathcal{H}_5)$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $C_\varepsilon > 0$, 使得

$$
|f(t)| \le \varepsilon|t|^{p-1} + C_\varepsilon|t|^{q-1}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{2.11}
$$

因此 $|f(u_n)u_n| \le \varepsilon|u_n|^p + C_\varepsilon|u_n|^q$. 由此应用 Vitali 定理, 则有

$$
\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(u_n)u_n dx = \int_\Omega f(u)u\, dx.
$$

由于 ψ_ε^j 具有紧支集, 在 (2.9) 式中令 $n \to \infty$, 由 (2.8) 与 (2.10) 式可得

$$
M_0\int_\Omega \psi_\varepsilon^j d\mu \le C_5\Big(\int_{B(x_j,2\varepsilon)} |u|^{p^*} dx\Big)^{\frac{1}{p^*}} + \lambda\int_{B(x_j,2\varepsilon)} f(u)u dx + \int_\Omega \psi_\varepsilon^j d\nu.
$$

令 $\varepsilon \to 0$, 可得 $M_0\vartheta_j \le \nu_j$. 因此

$$
(M_0\mathcal{S})^{\frac{N}{p}} \le \nu_j. \tag{2.12}
$$

下证以上不等式不可能成立. 假设对某 $j_0 \in J$ 有 $(M_0\mathcal{S})^{\frac{N}{p}} \le \nu_{j_0}$. 由 $(\mathcal{H}_2)$ 可得

$$\frac{1}{p}\widetilde{M}(\|u_n\|^p) - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^p)\|u_n\|^p \ge 0.$$

由 $\{u_n\}$ 为 $\mathcal{E}$ 的 $(PS)_c$ 序列知

$$c = \mathcal{E}(u_n) - \frac{1}{\mu}\langle \mathcal{E}'(u_n), u_n\rangle + o_n(1),$$

从而有 $c \ge \big(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{p^*}\big)\int_\Omega |u_n|^{p^*}dx + o_n(1) \ge \big(\dfrac{1}{\mu} - \dfrac{1}{p^*}\big)\int_\Omega \psi_\varepsilon^{j_0}|u_n|^{p^*}dx + o_n(1)$, 令 $n \to \infty$, 可得

$$c \ge \Big(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{p^*}\Big)\sum_{j\in J}\psi_\varepsilon^{j_0}(x_j)\nu_j \ge \Big(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{p^*}\Big)(M_0\mathcal{S})^{\frac{N}{p}}.$$

这与 $c < \big(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{p^*}\big)(M_0\mathcal{S})^{\frac{N}{p}}$ 矛盾, 所以 $J = \emptyset$, 从而 $u_n \to u$ 在 $L^{p^*}(\Omega)$ 中. 由 (2.11) 式可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(u_n)(u_n - u)|dx \le& \int_\Omega \big(\varepsilon|u_n|^{p-1} + C_\varepsilon|u_n|^{q-1}\big)|u_n - u|dx\\ \le&\varepsilon\Big(\int_\Omega |u_n|^p dx\Big)^{\frac{p-1}{p}}\Big(\int_\Omega |u_n - u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &+ C_\varepsilon\Big(\int_\Omega |u_n|^q dx\Big)^{\frac{q-1}{q}}\Big(\int_\Omega |u_n - u|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

因此再应用 (2.8) 式, 可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(u_n)(u_n - u)dx = 0. \tag{2.13}$$

由于 $u_n \to u$ 在 $L^{p^*}(\Omega)$ 中, 可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n|^{p^*-2}u_n(u_n - u)dx = 0. \tag{2.14}$$

由 $\langle \mathcal{E}'(u_n), u_n - u\rangle = o_n(1)$, 可推得

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{E}'(u_n), u_n - u\rangle =& M(\|u_n\|^p)\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla(u_n - u)dx\\ &- \int_\Omega |u_n|^{p^*-2}u_n(u_n - u)dx - \lambda\int_\Omega f(u_n)(u_n - u)dx = o_n(1),\end{aligned}$$

由上式与 (2.13), (2.14) 式可得

$$\lim_{n\to\infty} M(\|u_n\|^p)\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla(u_n - u)dx = 0.$$

由于 $\{u_n\}$ 是有界的且 M 连续, 必要时取子列, 则存在 $t_0 \ge 0$ 使得

$$M(\|u_n\|^p) \to M(t_0^p) \ge M_0, n \to \infty,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla(u_n - u)dx = 0$. 因此由 (S_+) 性质 (见文献 [12] 定义 2.3) 有 $u_n \to u$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中. 引理 2.3 证毕.

令

$$c^* = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}\mathcal{E}(\gamma(t)) > 0, \tag{2.15}$$

其中 $\Gamma = \big\{\gamma\in C([0,1],W_0^{1,p}(\Omega)) : \gamma(0)=0,\ \mathcal{E}(\gamma(1))<0\big\}$. 由引理 2.1, 根据无 (PS) 条件的山路引理知, 存在序列 $\{u_n\}\subset W_0^{1,p}(\Omega)$ 使得 $\mathcal{E}(u_n)\to c^*$ 且 $\mathcal{E}'(u_n)\to 0$.

引理 2.4 若$(\mathcal{H}_1)$–$(\mathcal{H}_5)$ 成立. 则存在 $\Lambda>0$, 使得对任意 $\lambda\geq\Lambda$ 有

$$c^*\in\big(0,(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{p^*})(M_0\mathcal{S})^{\frac{N}{p}}\big),$$

其中 c^* 由 (2.15) 式给出.

证 设 u_0 由引理 2.1(ii) 给出, 易知 $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathcal{E}(tu_0)=-\infty$, 从而存在 $t_\lambda>0$ 使得

$$\mathcal{E}(t_\lambda u_0)=\max_{t\geq 0}\mathcal{E}(tu_0).$$

因此

$$t_\lambda^{p-1}M(\|t_\lambda u_0\|^p)\|u_0\|^p=\lambda\int_\Omega f(t_\lambda u_0)u_0\,dx+t_\lambda^{p^*-1}\int_\Omega|u_0|^{p^*}dx,$$

即

$$M(\|t_\lambda u_0\|^p)\|t_\lambda u_0\|^p=\lambda t_\lambda\int_\Omega f(t_\lambda u_0)u_0\,dx+t_\lambda^{p^*}\int_\Omega|u_0|^{p^*}dx. \tag{2.16}$$

由 (2.3) 式可得, 当 $t_0<t_\lambda$ 时有

$$\frac{C_0}{\theta}\|u_0\|^{\frac{p}{\theta}}t_\lambda^{\frac{p}{\theta}}\geq t_\lambda^{p^*}\int_\Omega|u_0|^{p^*}dx.$$

又因为 $\frac{p}{\theta}<p^*$, 从而 t_λ 有界. 因此存在序列 $\lambda_n\to+\infty$ 使得 $t_{\lambda_n}\to T\geq 0$ $(n\to\infty)$. 因此存在 $C>0$, 使得对任意的 n 有 $M(\|t_{\lambda_n}u_0\|^p)\|t_{\lambda_n}u_0\|^p\leq C$, 即

$$\lambda_n t_{\lambda_n}\int_\Omega f(t_{\lambda_n}u_0)u_0\,dx+t_{\lambda_n}^{p^*}\int_\Omega|u_0|^{p^*}dx\leq C.$$

若 $T>0$, 由上面的不等式可知, 当 $n\to\infty$ 时有

$$+\infty\leftarrow\lambda_n t_{\lambda_n}\int_\Omega f(t_{\lambda_n}u_0)u_0\,dx+t_{\lambda_n}^{p^*}\int_\Omega|u_0|^{p^*}dx\leq C,$$

矛盾, 因此 $T=0$. 令 $\gamma^*(t)=tu_0$, 显然 $\gamma^*\in\Gamma$, 则有

$$0<c^*\leq\max_{t\geq 0}\mathcal{E}(\gamma^*(t))=\mathcal{E}(t_\lambda u_0)\leq\frac{1}{p}\widetilde{M}(\|t_\lambda u_0\|^p).$$

由 $t_{\lambda_n}\to 0$ 与 $(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{p^*})(M_0\mathcal{S})^{\frac{N}{p}}>0$ 知, 当 $\lambda>0$ 充分大时, $\frac{1}{p}\widetilde{M}(\|t_\lambda u_0\|^p)<\big(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{p^*}\big)(M_0\mathcal{S})^{\frac{N}{p}}$, 进而有 $0<c^*<\big(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{p^*}\big)(M_0\mathcal{S})^{\frac{N}{p}}$. 引理 2.4 证毕.

定理 1.1 的证明 由引理 2.1, 引理 2.2, 引理 2.3, 引理 2.4 及山路引理 (见文献 [13, 14]) 知, $\mathcal{E}$ 必有临界点 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$, 满足 $\mathcal{E}(u)=c^*\in\Big(0,\big(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{p^*}\big)(M_0\mathcal{S})^{\frac{N}{p}}\Big)$, 即 u 是方程 (1.1) 的一个非平凡解且能量水平位于 $\Big(0,\big(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{p^*}\big)(M_0\mathcal{S})^{\frac{N}{p}}\Big)$. 定理 1.1 证毕.

参 考 文 献

[1] Alves C O, Corrêa F J S A , Ma T F. Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type[J]. Comput. Math. Appl., 2005, 49: 85–93.

[2] Cheng B T, Wu X. Existence results of positive solutions of Kirchhoff problems[J]. Nonl. Anal., 2009, 71: 4883–4892.

[3] He X M, Zou W M. Infinitely many positive solutions for Kirchhoff-type problems[J]. Nonl. Anal., 2009, 70: 1407–1414.

[4] Liu D C. On a p-Kirhhoff equation via fountain theorem and dual fountain theorem[J]. Nonl. Anal., 2010, 72: 208–302.

[5] Perera K, Zhang Z T. Nontrival solutions of Kirchhoff-type problems via the Yang index[J]. J. Diff. Equ., 2006, 221: 246–255.

[6] Sun J, Tang C L. Existence and multiplicity of solutions for Kirchhoff type equations[J]. Nonl. Anal., 2011, 74: 1212–1222.

[7] Figueiredo G M. Existence of a positive solution for a Kirchhoff problem type with critical growth via truncation argument[J]. J. Math. Anal. Appl., 2013, 401: 706–713.

[8] Cheng B T. New existence and multiplicity of nontrivial solutions for nonlocal elliptic Kirchhoff type problems[J]. J. Math. Anal. Appl., 2012, 394: 488–495.

[9] Lü D F. A note on Kirchhoff-type equations with Hartree-type nonlinearities[J]. Nonl. Anal., 2014, 99: 35–48.

[10] Ma T F. Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type[J]. Nonl. Anal., 2005, 63: 1967–1977.

[11] Lions P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations, the limit case[J]. Rev. Mat. Iberoam. 1985, 1: 145–201.

[12] De Nápoli P, Mariani M C. Mountain pass solutions to equations of p-Laplacian type[J]. Nonlinear Anal., 2003, 54: 1205-1219.

[13] Rabinowitz P. Minimax methods in critical points theory with applications to differential equations[M]. CBMS Reg. Conf. Ser. Math., Vol. 65, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1986.

[14] Willem M. Minimax theorems[M]. Boston: Birkhäuser, 1996.

NONTRIVIAL SOLUTIONS FOR P-KIRCHHOFF TYPE EQUATIONS INVOLVING CRITICAL EXPONENT

LIU Qiong

(*School of Mathematics and Statistics, Hubei Engineering University, Xiaogan 432000, China*)

Abstract: In this paper, we are concerned with the existence of nontrivial solutions to a class of p-Kirchhoff type equations involving critical exponent. By analyzing the effect of critical nonlinear term and estimating energy functional carefully, with the aid of variational methods and the concentration-compactness principle, we establish the existence of nontrivial solutions for the p-Kirchhoff type equations, which extends the results of the Kirchhoff type equations.

Keywords: p-Kirchhoff type equation; $(\mathrm{PS})_c$ condition; critical exponent; nontrivial solution

2010 MR Subject Classification: 35J62; 35B33