

一种无风险利率时变条件下的 Black-Scholes 期权定价模型

任智格, 何 朗, 黄樟灿

(武汉理工大学理学院, 湖北 武汉 430070)

摘 要: 本文研究了无风险利率改进的 Black-Scholes 期权定价模型问题. 利用指数函数和 Ito 公式的方法, 获得了一种改进的 Black-Scholes 期权定价模型, 推广了现有 Black-Scholes 期权定价模型的结果.

关键词: Black-Scholes 模型; 期权定价; 无风险利率; 看涨期权

MR(2010) 主题分类号: 91B25

中图分类号: O213

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)01-0203-04

1 引言

期权是赋予其持有者在规定的期限内按特定的价格买入或卖出一定数量的某种特定商品的权利, 期权价格是期权买者为获得期权合约赋予的权利而支付给期权出售者的费用, 而期权价格的合理性直接影响着投资者投资风险性, 因此期权定价问题是期权研究中的一个重要方面. 其中 Black-Scholes 期权定价模型 (简称 B-S 期权定价模型) 广泛应用于期权定价问题中.

B-S 期权定价模型中假设^[1]: (1) 股票期望的波动性在期权有效期中是不变的; (2) 市场无摩擦, 即不存在税收和交易费用; (3) 金融资产在期权有效期内无红利和其它所得; (4) 无风险利率 r 是不变的; (5) 标的资产价格满足几何布朗运动:

$$\frac{ds}{s} = \mu dt + \sigma dw, \quad (1.1)$$

其中 s 表示标的资产, $t \in [0, T]$, T 表示期权到期日, μ 为期望收益率, σ 为波动率, dw 为标准布朗运动, $E(dw) = 0$, $\text{Var}(dw) = dt$. 在上述假设的条件下, B-S 期权定价模型如下:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + rs \frac{\partial c}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} \sigma^2 s^2 - rc = 0, \quad (1.2)$$

其中 $c(s, t)$ 表示欧式看涨期权在 t 时刻的价格.

从上述中可知, B-S 期权定价模型易于计算, 但 B-S 期权定价模型计算的价格与实际价格有一些差距, 主要是其假设条件不太符合现实, 在现实生活中, 这些假设条件存在部分不足, 从而限制了 B-S 期权定价模型的应用范围, 降低了期权定价的准确性. 因此, 对 B-S 期权定价模型的进一步分析研究具有一定的现实意义.

*收稿日期: 2014-01-22

接收日期: 2014-06-20

基金项目: “十二五” 国家基金项目: 建筑室外环境舒适度改善模拟与评价研究基金资助 (2013BAJ02B00); 创新项目基金基金资助 (2013-Ia-008).

作者简介: 任智格 (1988-), 女, 河北沙河, 硕士, 主要研究方向: 应用数学.

其中上述的假设条件 (4) 就存在不足, 在 B-S 模型中, 无风险利率是不变的, 一般采用国债利率, 故其研究的是常利率情形下的期权定价问题, 市场利率在短期情况下, 我们一般认为其是不变的, 但若是进行较长期投资时, 无风险利率就会受到国家政策、经济发展状况以及股市的影响, 这时如果用原有的 B-S 期权定价公式, 得到的值就会存在一定的偏差. 因此, 许多学者对 B-S 期权定价模型中的无风险利率的假设条件进行改进, 假设在长期投资中无风险利率变化是不确定, 无规则的, 应遵循几何布朗运动, 从而建立了用于描述利率变化的模型, 主要有 Vasicek 模型、Ho-lee 模型、HJM 模型. 这三个模型虽然都假设无风险利率是随机的, 但得出的结果仍与市场实际情况不太相符, 因此, 现有许多学者都在无风险利率服从 Vasicek 模型、Ho-lee 模型、HJM 模型的基础上对 B-S 期权定价模型进行改进^[2-10].

虽然研究无风险利率的方法有很多, 但大部分公式复杂, 限制了其在期权定价问题中的实际应用, 因此, 本文在原有假设的基础上, 考虑到时间越长, 风险性就越大, 无风险率就越小, 故假设无风险利率是变化的, 对 B-S 期权定价模型进行改进, 并尝试获得看涨期权和看跌期权的定价公式.

2 改进的 B-S 期权定价模型

2.1 新的无风险利率模型的确定

在较长期投资中, 无风险利率是变化的, 并且时间越长, 风险性越大, 无风险性就越小, 一开始, 无风险利率波动性会很大, 但达到一定值后, 无风险利率的波动性会越来越小, 近似于 0, 因此, 无风险利率的这种变化特征符合指数函数.

根据无风险利率的变化特征, 本文在 B-S 模型的基础上假设无风险利率是变化的, 其它条件不变, 并假设无风险利率与股票价格、波动率都不相关, 无风险利率在 t 时刻的值为 r_t , 无风险利率的初始值为 $t=0$ 时的国债利率 r_0 , 则假设 r_t 的表达式为

$$r_t = r_0 \cdot \alpha \cdot \exp\left(-\frac{t}{\beta}\right), \quad (2.1)$$

这里将近十年的每年的国债值带入上式中, 得出 $\alpha_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$, $\beta_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$,

$$\alpha = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5), \quad \beta = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5).$$

2.2 一种改进的 B-S 期权定价模型

假设在时刻 t 的期权价格为 $c(t, s_t)$, 下面根据对冲原理和 Ito 公式求出 $c(t, s_t)$ 所满足的偏微分方程, 即假设期权卖出方在时刻 t 买进 Δ 份股票以抵消损失的风险, 则余额为

$$R_t = c(t, s_t) - \Delta \cdot s_t. \quad (2.2)$$

根据 Ito 公式, 有

$$\begin{aligned} dR_t = dc(t, s_t) - \Delta \cdot ds_t &= \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{\partial c}{\partial s} s_t (\mu dt + \sigma dw) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} s_t^2 \sigma^2 dt - \Delta \cdot s_t (\mu dt + \sigma dw) \\ &= \left(\frac{\partial c}{\partial t} - \Delta \right) \sigma s_t dw + \left[\frac{\partial c}{\partial t} + \mu s_t \left(\frac{\partial c}{\partial s} - \Delta \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 s_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} \right] dt, \end{aligned} \quad (2.3)$$

这里取 $\Delta = \frac{\partial c}{\partial s}$, 则有

$$dR_t = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 s_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} \right) dt. \quad (2.4)$$

从上式可知不再出现影响随机波动的因素, 因此 R_t 应为无风险的, 即

$$\frac{dR_t}{dt} = r_t R_t = (r_0 \cdot \alpha \cdot \exp(-\frac{t}{\beta})) R_t, \quad (2.5)$$

从而

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 s_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} = (r_0 \cdot \alpha \cdot \exp(-\frac{t}{\beta})) (c - \Delta \cdot s_t) = (r_0 \cdot \alpha \cdot \exp(-\frac{t}{\beta})) (c - \frac{\partial c}{\partial s} s_t), \quad (2.6)$$

即根据 Ito 引理的理论知识, 得到改进的 B-S 微分方程:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (r_0 \cdot \alpha \cdot \exp(-\frac{t}{\beta})) s \frac{\partial c}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} \sigma^2 s^2 - (r_0 \cdot \alpha \cdot \exp(-\frac{t}{\beta})) c = 0. \quad (2.7)$$

根据随机偏微分方程来求解该微分方程, 得到欧式看涨期权的定价公式为

$$c(s, t) = sN(d_1) - K \exp(-(r_0 \cdot \alpha \cdot \exp(-\frac{t}{\beta}))(T - t))N(d_2), \quad (2.8)$$

其中 $d_1 = \frac{\ln(\frac{s}{K}) + (r_0 \cdot \alpha \cdot \exp(-\frac{t}{\beta}) + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$, $d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}$. 相应地, 可得出欧式看跌期权的定价公式

$$p(s, t) = K \exp(-(r_0 \cdot \alpha \cdot \exp(-\frac{t}{\beta}))(T - t))N(-d_2) - sN(-d_1). \quad (2.9)$$

3 实证分析

某初创企业为了更好的发展, 制定了一个战略计划, 并进行战略实施, 从而达到预期的效果, 计划战略实施期限 20 年, 预测了评估基准日战略实施的现金流, 如下表 1 所示:

表 1: 预测的评估基准日战略实施的现金流

投入资金与人力合计现金值	预期达到的现值	投资利润率	内部收益率 (20 年)	红利收益率
300 万	2000 万	39.99 %	37.49 %	1.93 %

根据表 1 进行计算: (1) 标的资产当前市场价值 s = 预期现金流的现值 (资产现值) = 300 万元, (2) 执行价值 x = 开发此产品的投资成本现值 = 2000 万元, (3) 有效期 20 年, (4) 标的资产价格的波动率为 0.28, (5) 初始无风险利率为 r_0 = 3.6% (国债), (6) 红利收益率为 1.93% (年平均, 公司支付股息比例为 6%), (7) 无风险利率 t = 20 年期国债利率 r = 3.6% (改进前), (8) 无风险利率 t = 20 年期利率 r = 1.6% (改进后), (9) 评估预期价值 c = 1998 万 (改进前), (10) 评估预期价值 c = 1878 万 (改进后).

从该例中可知, 改进前的方法得到的评估预期价值是 1998 万, 改进后的方法得到的评估预期价值是 1878 万, 而改进后的方法中考虑了国家政策、经济发展状况以及股市对无风险利率变化的影响, 根据现实情况, 随着时间越长, 无风险利率会越小, 即风险性就越大, 因此, 得到的预期值就会比改进前的方法得到的预期值小, 从而可得出, 改进后的方法使计算的结果更准确一些, 更接近现实情况.

4 结论

本文在 B-S 期权定价模型的基础上, 在假设无风险利率是变化的条件下, 对 B-S 期权定价模型进行改进, 运用指数函数和 Ito 公式得出改进的 B-S 期权定价模型, 并得出看涨期权和看跌期权的定价公式, 最后实例分析, 得出改进后的公式更接近现实情况, 本文为期权定价提供了一定的依据, 但仍有一定的不足之处, 有待进一步的研究, 因此未来研究方向有两点: 一、将该方法应用于实践中, 并根据具体情况对其进行改进; 二、将该方法与已有改进方法进行比较, 对其进行优化.

参 考 文 献

- [1] 马媛媛. 欧式期权 B-S 定价模型的推广及期权交易的风控管理 [D]. 山东大学硕士学位论文, 2012.
- [2] 王莉君, 张曙光. Vasicek 利率模型下的亚式期权的定价问题和数值分析 [J]. 应用数学学报, 2003, 26(3): 467-474.
- [3] 姚落根, 王雄, 杨向群. Vasicek 利率模型下的几何亚式期权的定价问题 [J]. 湘潭大学学报 (自然科学版), 2004, 26(3): 20-23.
- [4] 田萍. 随机利率下期权定价探讨 [J]. 数理统计与管理, 2008, 27(6): 117-124.
- [5] 邓小华. 随机利率下服从分数布朗运动的期权定价 [D]. 重庆大学硕士学位论文, 2009.
- [6] 周海林, 吴鑫育, 高凌云, 陆凤彬. 随机利率条件下的欧式期权定价 [J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(4): 729-734.
- [7] 肖斌. 基于随机利率模型的欧式期权定价研究 [D]. 哈尔滨工程大学, 2011.
- [8] 黄文礼, 陶祥兴, 李胜宏. 分数维 Vasicek 利率模型下的欧式期权定价公式 [J]. 数学学报 (中文版), 2012, 55(2): 219-230.
- [9] 刘丽霞, 李英红, 石凌. 随机利率下线性区间期权的定价公式 [J]. 河北师范大学学报 (自然科学版), 2013, 37(2): 129-133.
- [10] 王嘉展, 刘丽霞. 随机利率下股票价格服从几何分数布朗运动的幂期权定价 [J]. 河北师范大学学报 (自然科学版), 2014, 38(2): 113-116.

A BLACK-SCHOLES OPTION PRICING MODE BASED ON THE RISK-FREE INTEREST RATE UNDER VARYING CONDITIONS

REN Zhi-ge , HE Lang , HUANG Zhang-can

(School of Science, WuHan University of Technology, Wuhan 430070, China)

Abstract: This paper studies the pricing model of Black-Scholes option under the changed risk-free rate, and achieves an improved Black-Scholes option pricing model by the method of the index and Ito formula. It promotes the existing Black-Scholes option pricing model.

Keywords: Black-Scholes model; option pricing; risk-free rate; call options

2010 MR Subject Classification: 91B25