第21卷第4期　数学研究与评论　Vol. 21 No. 4
2001年11月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Nov. 2001

分次直投射模及应用*

陈 清 华
(福建师范大学数学系，福建 福州 350007)

摘　要：本文引进分次直投射模的概念，得到分次直投射模的一个判定定理，并利用分次直投射模刻划了分次左遗传环，分次左半遗传环，分次左半单环和分次左 PP-环.

关键词：分次直投射模；分次左遗传环；分次左半遗传环；分次左 PP-环.
分类号：AMS(1991) 16W50/CLC O153.3
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2001)04-0615-04

1 引 言

本文所指的环 R 均是有单位元的 G- 型分次环，这里的 G 是一般乘法群，e 是其单位元；所有的模均是 G- 型分次左 R- 模；R-gr 记为 R 上全体 G- 型分次左 R- 模和阶为 e 的分次态射（简称分次态射）所成的 Grothendieck 范畴；若 $M=\bigoplus_{\sigma\in G}M\sigma$，$\lambda\in G$，把分次模 $M(\lambda)$ 称为 M 的 λ- 同纬映像，这里的 $M(\lambda)=M$ 且 $M(\lambda)_\sigma=M\sigma\lambda(\forall\ \sigma\in G)$；其他未说明的概念见文献[1]，[2].

一个分次模称为分次直投射模，是指任给 M 的分次直和项 N 及投影 $\pi:M\to N$（一定是 e 阶态射），对于 e 阶分次满同态 $f:M\to N$，均存在 $g\in \mathrm{End}_{R\text{-}gr}(M)$ 使得下图可交换，即 $f\circ g=\pi$.

$$\begin{array}{ccccc} M & & & & \\ g\downarrow & \searrow\pi & & & \\ M & \xrightarrow{f} & N & \to & 0 \end{array}$$

显然，分次投射模是分次直投模，反之不对，见[4]例 A（看作平凡分次）.

首先，我们给出分次直投射模的一个刻划：

定理 1　设 $M\in R$-gr，则下列条件是等价的

(1) M 是分次直投射模.

(2) 如果 N 是 M 的一个分次同态象，A 是 M 的一个分次直和项，则在 R-gr 中，正合序列 $N\to A\to 0$ 是可裂的.

(3) 如果 S 是 M 的分次子模且 M/S 分次同构于 M 的一个直和项，则 S 是 M 的一个分次

* 收稿日期：1998-07-28
基金项目：福建省教委科学基金资助项目(JA00152)
作者简介：陈清华(1962-)，男，福建莆田人，硕士，福建师范大学副教授.

直和项.

证明 (1)⇒(2) 若 A 是 M 的一个分次直和项,可设 $M=A\oplus B(B\in R\text{-}gr)$,$\pi: M\to A$,$i: A\to M$ 是对应的投影和嵌入映射,它们都是分次态射且 $\pi\cdot i=1_A$. 又设 $f: M\to N$ 和 $g: N\to A$ 均分次满同态,则 $g\cdot f$ 是分次满同态. 由于 M 是分次直投射模,则一定存在分次同态 h,使得下图在 $R\text{-}gr$ 中可换

$$\begin{tikzcd} & & M \arrow[d, "\pi"] \arrow[dl, "h"'] \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] & A \end{tikzcd}$$

令 $g'=fhi$,则 $g': A\to N$ 是分次同态且 $gg'=g(fhi)=(gfh)\cdot i=\pi\cdot i=1_A$,所以 $N\xrightarrow{g}A\longrightarrow 0$ 在 $R\text{-}gr$ 中可裂.

(2)⇒(3) 令 $M=N$,A 是 M 的分次直和项且分次同构于 M/S,则 $0\to S\to M\to M/S\to 0$ 在 $R\text{-}gr$ 中可裂,从而 S 是 M 的一个分次直和项.

(3)⇒(1) 设 A 是 M 的一个分次直和项,$M=A\in BB$ 且 $\pi: M\to A$ 是投影,$f: M\to A$ 是任一 e 阶分次满同态,则 $\mathrm{Ker}f$ 是 M 的分次子模且 $M/\mathrm{Ker}f$ 分次同构于 A,由(3),$\mathrm{Ker}f$ 是 M 的分次直和项,故序列 $0\to \mathrm{Ker}f\to M\to A\to 0$ 在 $R\text{-}gr$ 中可裂,从而存在分次同态 $f': A\to M$ 使得:$ff'=J_A$,定义 $g: M\to$ 使得 $g|_A=f'$,$g/B=0$,则 g 是分次同态且 $f\cdot g=\pi$,即 F 图在 $R\text{-}gr$ 中可换

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "\pi"] & & \\ M \arrow[r, "f"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

故 M 是分次直投射模.

根据上述定理,容易得到:

推论 1 分次直投射模 M 的分次直和项 A 仍是分次直投射模.

推论 2 设 $M\oplus N$ 是分次直投射模,则正合序列 $0\to L\to M\to N\to 0$ 在 $R\text{-}gr$ 中可裂.

推论 3 设 $0\to L\to P\to N\to 0$ 是 $R\text{-}gr$ 中的一个正合序列,P 是分次投射模,则下列结论等价

(1) $P\oplus N$ 是分次直投射模.

(2) N 是分次投射模.

(3) $P\oplus N$ 是分次投射模.

推论(4) 设 A,B 均为分次直投射模 M 的分次直和项,如果 $A+B$ 是 M 的分次直和项,则 $A\cap B$ 也是 M 的分次直和项.

下面,利用分次直投射模的概念,刻划几类特殊分次环.

一个分次环 R 被称为是分次左遗传环,是指它的任一分次理想都是分次投射的. 关于分次左遗传环,有

定理 2 该 R 是 G- 型分次环,则下面结论是等价的

(1) R 是分次左遗传环.

(2) 任一分次投射 R- 模 M 的分次子模 N 是分次投射的.

(3) 任一分次投射 R- 模 M 的分次子模 N 是投射的.

(4) 任一分次投射 R- 模 M 的分次子模 N 是分次直投射的.

(5) 任一分次投射 R- 模 M 的分次子模 N 是直投射的.

证明 (1)⇒(2) 类似非分次的情形;(2)⇒(4),(3)⇒(5),(5)⇒(4) 易证.

(2)⇒(3) 根据[1;I.2.2],分次子模 N 是分次投射的当且仅当 N 是投射的,即得.

(4)⇒(2) 设 N 是分次投射 R- 模 M 的任一分次子模,又设 F 是分次自由 R- 模使得有分次满同态 $f: F \to N$,则 $F \oplus N$ 是分次投射 R- 模 $F \oplus M$ 的分次子模,所以 $F \oplus N$ 是分次直投射模,由推论 3(2) 知:N 是分次投射模.

我们称分次环 R 是分次左半遗传环,是指 R 的任一有限生成分次左理想是分次投射的.类似定理 2,关于分次左半遗传环,有

定理 3 该 R 是 G- 型分次环,则下列结论等价:

(1) R 是分次左半遗传环.

(2) 任一分次投射 R- 模 M 的有限生成分次子模 P 是分次投射的.

(3) 任一分次投射 R- 模 M 的有限生成分次子模 P 是投射的.

(4) 任一分次投射 R- 模 M 的有限生成分次子模 P 是分次直投射的.

(5) 任一分次投射 R- 模 M 的有限生成分次子模 P 是直投射的.

关于分次左半单环(定义见[1],它等价于:任一分次左理想均是分次直和项),有

定理 4 设 R 是 G- 型分次环,则下列结论是等价的:

(1) R 是分次左半单环.

(2) 任一分次 R- 模 M 是分次投射的.

(3) 任一分次 R- 模 M 是投射的.

(4) 任一分次 R- 模 M 是分次直投射的.

(5) 任一分次 R- 模 M 是直投射的.

(6) 任一 2— 生成分次 R- 模 M 是分次投射的.

(7) 任一 2— 生成分次 R- 模 M 是投射的.

(8) 任一 2— 生成分次 R- 模 M 是分次直投射的.

(9) 任一 2— 生成分次 R- 模 M 是直投射的.

一个分次环 R 被称为分次左 PP- 环,是指它的分次主左理想是分次投射的.关于分次左 PP- 环,有

定理 5 分次环 R 为分次左 PP- 环当且仅当对任给 $r \in h(R) = \bigcup_{g \in G} Rg$,均有 $R \oplus Rr$ 为分次直投射模.

证明 "⇒" R 为分次左 PP- 环,故 R 的分次主左理想是分次投射的,从而任给 $r \in h(R)$,$R, R \cdot r$ 均为分次投射模,所以 $R \oplus Rr$ 为分次投射模,因而,$R \oplus Rr$ 为分次直投射模;

"⇐" 对任给 $r \in Rg \subseteq h(R)$,$R \oplus Rr$ 为分次直投射模,故 $R \oplus Rr(g^{-1})$ 为分次直投射模(这里 $Rr(g^{-1})$ 是 $R \cdot r$ 的 g^{-1}— 同纬映像).考虑分次满同态

$$f: R \to Rr(g^{-1})$$

$$x_\sigma \to x_\sigma \cdot r$$

注意到 R 是分次投射 R- 模,根据推论 3(2),$Rr(g^{-1})$ 是分次投射模,再根据[1;I.1.4]知,Rr

是分次投射模,从而 R 是分次左 PP- 环.

注 1　根据左,右对称,可以给出分次右直投射模的概念,进而刻划右分次环类。

注 2　对偶地可以引进分次(左、右)直内射模的概念,并用来刻划相应的分次环类.

参考文献:

[1] NASTASESCU C, OYSTAEYEN F V. *Graded Ring Theory* [M]. North Halland, Amsterdam, 1982.

[2] ANDERSON F W, FULLER K R. *Rings and Categories of Modules* [M]. Springer, New York, 1974.

[3] HAUSEN J. *Direct projective modules* [J]. Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 1981, **9**: 447—451.

[4] XUE Wei-min. *Characterization of rings using direct projective modules and direct injective modules* [J]. J. Pure Appl. Algebra, 1993, **87**: 99—104.

[5] XUE Wei-min. *Characterizations of perfect rings and semiperfect rings using direct-projective modules* [J]. Fujian shifan Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban, 1994, **10**(1): 1—5.

[6] CHEN Qing-hua. *A reselt of graded pp-rings* [J]. J. of Math. Research and Exposition, 1995, **15** (3): 436—438.

Graded Direct Projective Modules and Applications

CHEN Qing-hua

(Dept. of Math., Fujian Normal University, Fuzhou 350007, China)

Abstract: In this paper, we introduces the concept of graded direct projective modules, obtains a critical theorem of graded direct projective modules and characterize graded (left) hereditary rings, graded (left) semihereditary rings, graded(left) semisimple rings and graded(left) pp-rings via graded direct projective modules.

Key words: graded direct projective module; graded(left) hereditary ring; graded(left) semihereditary ring; graded(left) semisimple ring; graded(left) pp-ring.