第21卷第2期
2001年5月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 21 No. 2
May 2001

$P(n,k)$ 的计数及其良域*

伍 启 期
(佛山大学数学系，广东 佛山 528000)

摘 要：设 $P(n,k)$ 为整数 n 分为 k 部的无序分拆的个数，每个分部 $\geqslant 1$；$P(n)$ 为 n 的全分拆的个数. $P(n,k)$ 是用途广泛的、且又十分难予计算的数. 本文证明了下述定理：当 $n<k$，$P(n,k)=0$；当 $k\leqslant n\leqslant 2k$，$P(n,k)=P(n-k)$；当 $k=1,4\leqslant n\leqslant 5$，或者当 $k\geqslant 2,2k+1\leqslant n\leqslant 3k+2$，$P(n,k)=P(n-k)-\sum\limits_{t=0}^{n-2k-1}P(t)$. 还定义了 $P(n,k)$ 的良域，因而可借助若干个 $P(n)$ 的值，迅速地计算大量的 $P(n,k)$ 的值.

关键词：全分拆；无序分拆；良域；计数.
分类号：AMS(1991) 05A17/CLC O157
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2001)02-0281-06

1 引言与结论

设 $P(n,k)$ 表示正整数 n 分为 k 个分部的无序分拆的个数，每个分部 $\geqslant 1$. $P(n)$ 为 n 的全分拆的个数. 上述二数都是 Euler(1707 － 1783) 在研究数论时所建立并加以研究的. 尤其是 $P(n,k)$，无论在理论上或实际应用上都有广泛用途，是组合学、图论、和数论里重要的数据之一.

理论上，$P(n,k)$ 是 n 的 $k-1$ 次多项式，而多项式的诸系数又是依赖于同余式 mod $k!$ 的某些常数[1]，所以，对 $k\geqslant 4$，很难对 $P(n,k)$ 进行计数或推导出简明的公式. 为了改变计算 $P(n,k)$ 的困难状况，我们给出了 $P(n,k)$ 的降部恒等式[2]. 最近又给出了几个直接计算的定理[3]，还给出了 $P(n,4)$ 的简单统一的显式[4].

本文旨在根据文[3]的主要定理，给出下述：

定理1 $P(n,k)$能表示成下式：

$$P(n,k)=\begin{cases}0, & \text{当 } n<k, \quad (1)\\ P(n-k), & \text{当 } k\leqslant n\leqslant 2k, \quad (2)\\ P(n-k)-\sum\limits_{t=0}^{n-2k-1}P(t), & \text{当 } k=1,4\leqslant n\leqslant 5 \text{ 或者} \quad (3)\\ & \text{当 } k\geqslant 2,2k+1\leqslant n\leqslant 3k+2,\end{cases}$$

* 收稿日期：1998-03-30
作者简介：伍启期(1939-)，男，广东台山人，佛山大学教授.

注 当 $k=1, 4 \leqslant n \leqslant 5$，(3) 式可以写成下式：

$$P(n,1)=P(n-1)-\sum_{t=0}^{n-3}P(t). \tag{4}$$

这个定理，揭示了 $P(n)$ 与 $P(n,k)$ 的一个转换关系，借用 $P(n)$ 计算 $P(n,k)$ 有其趣味和方便之处. 定理 1 的证明放在本文最后一段. 还定义了 $P(n,k)$ 的良域，这有理论上的意义.

2 辅助数表

由定理 1 看出，借用全分拆数 $P(n)$ 及若干个全分拆数之和能直接计算 $P(n,k)$. 为实际应用之便，下附 $P(n)$ 数表及和式 $\sum_{t=0}^{n}P(t)$ 的数表[3].

表 1 $P(n)$ 的数表（$n=10k+m$）

m \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	42	627	5604	37338	204226	966467	4087968	15796476	56634173
1	1	56	792	6842	44583	239943	1121505	4697205	18004327	64112359
2	2	77	1002	8349	53174	281589	1300156	5392783	20506255	72533807
3	3	101	1255	10143	63261	329931	1505499	6185689	23338469	82010177
4	5	135	1575	12310	75175	386155	1741630	7089500	26543660	92669720
5	7	176	1958	14883	89134	451276	2012558	8118264	30167357	104651419
6	11	231	2436	17977	105558	526823	2323520	9289091	34262962	118114304
7	15	297	3010	21637	124754	614154	2679689	10619863	38887673	133230930
8	22	385	3718	26015	147273	715220	3087735	12134164	44108109	150198136
9	30	490	4565	31185	173525	831820	3554345	13848650	49995925	169229875

表 2 $\sum_{t=0}^{n}P(t)$ 的数表（$0 \leqslant n \leqslant 25$）

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\sum_{t=0}^{n}P(t)$	1	2	4	7	12	19	30	45	67	97	139	195	272	373	508	684

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$\sum_{t=0}^{n}P(t)$	915	1212	1597	2084	2714	3506	4508	5763	7338	9296

读者可根据表 1、表 2，自行无限地扩大表 2 里的 n 值，所以本文只引用[3]里的表 2.

3 $P(n,k)$ 的良域

当 $k=1, \forall n \geqslant 1, P(n,1)=1$，这是平凡情形. 当 $n<k$ 或 $k \leqslant n \leqslant 2k$，$P(n,k)$ 分别为 0 或为 $P(n-k)$，这也是简单情形（见定理 1(1)(2) 式）.

以 k 为横坐标，n 为纵坐标，把 $P(n,k)$ 看作为定义在整点 (k,n) 上的二元离散函数. 根据 (2)(3) 式的条件，由 $n=k, n=2k, n=2k+1, n=3k+2$ 作为四条划分区域的直线. 记区域：

$$D_1=\{(k,n)\mid k \geqslant 2, k \leqslant n \leqslant 2k\}, \tag{5}$$

$$D_2 = \{(k,n) \mid k \geqslant 2, 2k+1 \leqslant n \leqslant 3k+2\}, \qquad (6)$$

D_1 称为 $P(n,k)$ 的简单域；D_2 称为计算 $P(n,k)$ 的良域. 因为对 $\forall\ (k,n) \in D_2$，都能由(3)式，表 1 和表 2 可以直接算出或表示出 $P(n,k)$，而此情形又不是平凡的或简单的情形，所以这引起我们特殊的兴趣，故称 D_2 为 $P(n,k)$ 的良域. 对 D_2 上的分部数 k，用记号 $k[2k+1, 3k+2]$ 表示分部数为 $k(\geqslant 2)$ 时，对应的 n 值范围是 $[2k+1, 3k+2]$. 例如，在下表里，$2[5,8]$，即是 $k=2, 5 \leqslant n \leqslant 8$，$3[7,11]$，即是 $k=3, 7 \leqslant n \leqslant 11$ 等. 为了实用方便，给出良域表.（见表 3）由左至右横排. 我们可以无限地扩大良域表.

表 3　　$P(n,k)$ 的良域表（$2 \leqslant k \leqslant 50$）

2[5,8]，3[7,11]，4[9,14]，5[11,17]，6[13,20]，7[15,23]，8[17,26]，9[19,29]，10[21,32]，11[23,35]，12[25,38]，13[27,41]，14[29,44]，15[31,47]，16[33,50]，17[35,53]，18[37,56]，19[39,59]，20[41,62]，21[43,65]，22[45,68]，23[47,71]，24[49,74]，25[51,77]，26[53,80]，27[55,83]，28[57,86]，29[59,89]，30[61,92]，31[63,95]，32[65,98]，33[67,101]，34[69,104]，35[71,107]，36[73,110]，37[75,113]，38[77,116]，39[79,119]，40[81,122]，41[83,125]，42[85,128]，43[87,131]，44[89,134]，45[91,137]，46[93,140]，47[95,143]，48[97,146]，49[99,149]，50[101,152]……

为了形象化，给出良域图，见图 1. 图中的 D_2 为良域.

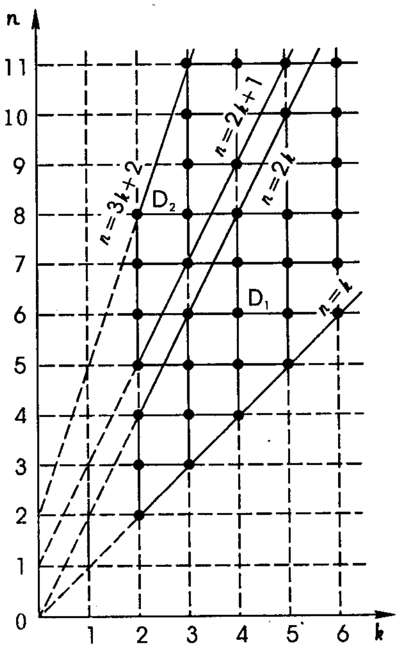

图 1　$P(n,k)$ 的良域图.

4 算 例

例 1 求 $P(8,2)$ 解:$n=8,k=2$,由表 3,查得 2[5,8],所以数对 $k=2,n=8$ 位于良域,能直接计数.由定理 1(3) 式,$n-2k-1=8-4-1=3$,由表 1 和表 2,

$$P(8,2)=P(6)-\sum_{t=0}^{3}P(t)=11-7=4.$$

验证:事实上,$8=1+7=2+6=3+5=4+4$ 实得 $P(8,2)=4$.

例 2 求 $P(60,21)$.解:$n=60,k=21$,由表 3 查到 21[43,65],即数对 $k=21,n=60$ 位于良域,能直接计数.由(3) 式和表 1、表 2,易得

$$P(60,21)=P(39)-\sum_{t=0}^{60-42-1}P(t)=P(39)-\sum_{t=0}^{17}P(t)$$
$$=31185-1212=29973.$$

例 3 求 $P(145,70)$

解 $k=70,n=145$,已超出良域表(见表 3).转而根据(3) 式的条件 $2k+1\leqslant n\leqslant 3k+2$,得 $141\leqslant n\leqslant 212$,可知数对$(k,n)$位于良域,能借用 $P(n)$ 直接计数.因为 $n-2k-1=145-140-1=4$,故

$$P(145,70)=P(75)-\sum_{t=0}^{4}P(t)\text{(查表 1 表 2)}$$
$$=8118264-12=8118252.$$

例 4 由(3) 式,当 $k\geqslant 2$,给出具体的 n 值,得出一些有趣的恒等式.例如,

当 $n=3k$,代入(3) 式,有

$$P(3k,k)=P(2k)-\sum_{t=0}^{k-1}P(t)=P(2k)-P(0)-P(1)-\cdots-P(k-1); \tag{7}$$

当 $n=3k+1$,代入(3) 式,有

$$P(3k+1,k)=P(2k+1)-\sum_{t=0}^{k}P(t)$$
$$=P(2k+1)-P(0)-P(1)-\cdots-P(k-1)-P(k), \tag{8}$$

等等.

5 定理 1 的证明

因为文[3] 刊于外刊,查阅不便,现引用文[3] 的主要定理作为证明本文定理 1 的引理.

引理 1(即文[3] 定理 2.2) 设 m,r 是两个整数,使得

(i) $m=2,r=0$; (9)

或者

(ii) $m\geqslant 3,0\leqslant r\leqslant \frac{m}{2}$ (10)

则

$$P(2m-r-1,m-r-1)=P(m)-\sum_{t=0}^{r}P(t). \tag{11}$$

于是，我们的兴趣在于：任给一个 $P(n,k)$，当 n,k 满足什么条件时，能够借用全分拆数 $P(n)$ 对无序分拆数 $P(n,k)$ 进行直接的计数？

证明定理 1　当且仅当 $n<k, P(n,k)=0$，所以(1) 式成立.

当 $k \geqslant \frac{n}{2}$，亦即 $n \leqslant 2k$，已有公式[5]

$$P(n,k)=P(n-k) \tag{12}$$

但 $n \leqslant 2k$，包括了 $n<k$ 及 $k \leqslant n \leqslant 2k$ 两个区间段. 当 $n<k$ 已有(1) 式. 余下当 $k \leqslant n \leqslant 2k$ 时，$P(n,k)=P(n-k)>0$，故(2) 式成立.

下面证明(3) 式. 由引理 1 的(10)(11) 式，令

$$n=2m-r-1, \tag{13}$$

$$k=m-r-1, \tag{14}$$

$$m \geqslant 3 \tag{15}$$

$$0 \leqslant r \leqslant \frac{m}{2} \tag{16}$$

由(13) ～ (16) 式求得：

$$m=n-k, \tag{17}$$

$$r=n-2k-1, \tag{18}$$

$$\max\{k+3, 2k+1\} \leqslant n \leqslant 3k+2 \tag{19}$$

由(19)式，得：

$$\text{当 } k=1, \text{则 } n=4,5; \tag{20}$$

$$\text{当 } k \geqslant 2, \text{则 } 2k+1 \leqslant n \leqslant 3k+2. \tag{21}$$

(20)(21)即是(3)式括号内的条件，在这样的条件下，将(13)(14)(17)(18)代入(11)式，即证得(3)式成立. □

注　当 $k=1, n=4,5$，(3) 式简化成(4) 式，这是平凡情形. 事实上，由(4) 式，

当 $n=4, P(4,1)=P(3)-\sum_{t=0}^{1} P(t)=P(3)-P(0)-P(1)=1.$

当 $n=5, P(5,1)=P(4)-\sum_{t=0}^{2} P(t)=5-4=1.$

所以，即使对 $k=1$，(3) 式也是成立的.

参考文献：

[1] 柯　召，魏万迪. 组合论(上册) [M]. 北京：科学出版社，1981，**10**：297－301.
KE Zhao，WEI Wan-di. *Theory of Combinatorics* (*Vol.* 1) [M]. Beijing：Science Press，1981，**10**：297－301. (in Chinese)

[2] 伍启期. $P(n,k)$ 的一个降部恒等式 [J]. 数学的实践与认识，1993，**4**：50－55.
WU Qi-qi. *An identity for descending the number of parts of* $P(n,k)$ [J]. Mathematics in Practics and Theory，1993，**4**：50－55. (in Chinese)

[3] WU Qi-qi. *Remarks on direct computation for* $P(n,k)$ [J]. SEA. Bull. Math.，Science Press，Beijing，New York，1995，**19**(1)：69－73.

[4] 伍启期. $P(n,4)$ 与 $A(n,4)$ 的简单统一显式 [J]，科学通报，1996，**41**(10)：959.

WU Qi-qi. *On the simple unified exlicit formulas for $P(n,4)$ and $A(n,4)$* [J]. Chinese Science Bulletin, 1996, 41(10): 959. (in Chinese)

[5] TOMESCU I. *Introduction to Combinatorics* [M]. Collet's Publishing Company, Chapter 5, 1975.

On the Calculation of $P(n,k)$ and its Good Field

WU Qi-qi

(Dept. of Math., Foshan University, Foshan 528000, China)

Abstract: Let $P(n,k)$ be the number of unordered partitions of an integer n into k parts, where each part $\geqslant 1$, and $P(n)$ the number of all unordered partitions of n (so, in brief, it is called the number of total partitions). The number $P(n,k)$ has a broad applications. However, it is rather difficult to find the values of $P(n,k)$.

In this paper we give the following theorem: $P(n,k)=0$, when $n<k$; $P(n,k)=P(n-k)$, when $k\leqslant n\leqslant 2k$; and $P(n,k)=P(n-k)-\sum_{t=0}^{n-2k-1}P(t)$, when $k=1$, $4\leqslant n\leqslant 5$, or when $k\geqslant 2, 2k+1\leqslant n\leqslant 3k+2$. And we define also the good field of $P(n,k)$. This theorem will help us find numberless the values of $P(n,k)$ quickly with the aid of the values of $P(n)$.

Key words: total partitions; unordered partitions; good field; calculation.