第23卷第3期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 3
2003年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2003

# Bessel 框架及其摄动*

周家云, 郭燕妮, 刘宇, 丁友征
(曲阜师范大学数学系, 山东 曲阜 273165)

**摘 要**:本文进一步研究了 Bessel 框架的性质,给出其稳定性和摄动的几个有意义的结果.

**关键词**:框架; 预框架算子; Bessel 框架; 摄动.
**分类号**:AMS(2000) 46C/CLC number: O177.1
**文献标识码**:A **文章编号**:1000-341X(2003)03-0515-05

## 1 预备知识

本文中用 $H$(或 $K$)表示复无限维可分的 Hilbert 空间, $\{e_n\}_{n\in N}$ 是 $l^2(N)$ 空间的标准就范正交基. 用 $L(\cdot,\cdot)$, $\kappa(\cdot,\cdot)$, $\Phi(\cdot,\cdot)$ 分别表示有界线性算子,紧算子,Fredholm 算子组成的空间, $C$ 表示复数集.

**定义 1.1** 设 $\{x_n\}_{n\in N}$ 是 $H$ 中的序列,如果存在常数 $B>0$,使得

$$\sum_{n\in N}|\langle x,x_n\rangle|^2\leqslant B\|x\|^2,\forall\ x\in H,$$

则称 $\{x_n\}_{n\in N}$ 是 Bessel 序列. 如果存在常数 $A,B>0$,使得

$$A\|x\|^2\leqslant\sum_{n\in N}|\langle x,x_n\rangle|^2\leqslant B\|x\|^2,\ \forall\ x\in H,$$

则称 $\{x_n\}_{n\in N}$ 是 $H$ 的框架. 其中 $A,B$ 为框架界. 当 $A=B$ 时称 $\{x_n\}_{n\in N}$ 为严格框架;当 $A=B=1$ 时称 $\{x_n\}_{n\in N}$ 为正规框架.

**定义 1.2** 设 $\{x_n\}_{n\in N}$ 是 $H$ 的框架,称算子 $T$ 为 $\{x_n\}_{n\in N}$ 的预框架算子,如果 $T\in L(l^2,H)$,使得 $Te_n=x_n$, $n\in N$.

由文献[2]可得

**命题 1.1** 设 $\{x_n\}_{n\in N}\subseteq H$ 是 Bessel 序列,则 $\{x_n\}_{n\in N}$ 是 $H$ 的框架的充分必要条件是存在 $T\in L(l^2,H)$ 是满的,且使得 $Te_n=x_n,n\in N$.

**定义 1.3** 设 $\{x_n\}_{n\in N}$ 是 $H$ 的框架,定义: $S:H\to H$ 使得

$$Sx=\sum_{n\in N}\langle x,x_n\rangle x_n,\quad \forall\ x\in H,$$

* 收稿日期:2001-11-26
基金项目:国家自然科学基金资助项目(19871048)
作者简介:周家云(1940- ),男,教授.



© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

则称 $S$ 是 $\{x_n\}_{n\in N}$的框架算子. 易知 $S\in L(H)$是可逆的正算子.

**定义 1.4** 设$\{x_n\}_{n\in N}$,$\{y_n\}_{n\in N}$是 $H$ 的框架,称 $\{y_n\}_{n\in N}$是 $\{x_n\}_{n\in N}$的交错对偶框架,如果$\{y_n\}_{n\in N}$满足:$x=\Sigma_n\langle x,y_n\rangle x_n,\forall\ x\in H$.

**定义 1.5** 设$\{x_n\}_{n\in N}$和 $\{y_n\}_{n\in N}$分别是 $H$ 和 $K$ 的框架,称$\{x_n\}_{n\in N}$, $\{y_n\}_{n\in N}$是相似的,如果存在算子 $V\in L(H,K)$是可逆的,使得 $Vx_n=y_n$, $n\in N$.

**定义 1.6** 设 $\{x_n\}_{n\in N}$和 $\{y_n\}_{n\in N}$分别是 $H$ 和 $K$ 的框架,称 $\{x_n\}_{n\in N}$, $\{y_n\}_{n\in N}$是弱不相交的,如果 $\mathrm{span}\{x_n\oplus y_n\}_{n\in N}$在 $H\oplus K$ 中稠密.

**定义 1.6′** 设$\{x_{jn}\}_{n\in N}$是 Hilbert 空间 $H_j(j=1,2,3,\cdots,k)$的框架,称$\{x_{1n}\}$,$\{x_{2n}\}$,$\cdots$,$\{x_{kn}\}$是弱不交的,如果 $\mathrm{span}\{x_{1n}\oplus x_{2n}\oplus\cdots\oplus x_{kn}\}_{n\in N}$在 $H_1\oplus H_2\oplus\cdots\oplus H_k$ 中稠密.

**定义 1.7** 设$\{x_n\}_{n\in N}$是 $H$ 的框架,称是 Bessel 的,如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx_n$ 在 $H$ 中收敛的必要条件是$\{a_n\}_{n\in N}\in l^2$.

**定义 1.8** 设$\{x_n\}_{n\in N}$是 $H$ 的框架,称 $\{x_n\}_{n\in N}$是 $H$ 的近 Riesz 基,如果存在有限集 $\sigma\subseteq N$,使$\{x_n\}_{n\in N\setminus\sigma}$是 $H$ 的 Riesz 基.

以上内容可在文献[1],[2],[3]中查到.

文献[1]中给出以下结论

**命题 1.2** 设$\{x_n\}_{n\in N}$是 $H$ 的框架,$T$ 是其预框架算子,则$\{x_n\}_{n\in N}$是 $H$ 的 Bessl 框架的充要条件是 $T$ 是 Fredholm 算子.

**命题 1.3** 设$\{x_n\}_{n\in N}$是 $H$ 的框架,则$\{x_n\}_{n\in N}$是 $H$ 的 Bessl 框架的充要条件是$\{x_n\}_{n\in N}$是 $H$ 的近 Riesz 基.

## 2 Bessel 框架的摄动

**定理 2.1** 设$\{x_n\}_{n\in N}$是 $H$ 的 Besselian 框架,$T$ 是它的预框架算子,$S$ 是 $T$ 的伪逆,$\{\omega_n\}_{n\in N}\subseteq H$, 定义 $B:l^2\to H$,使 $B\{c_n\}=\sum\limits_{n\in N}c_n(\omega_n-x_n)$. 如果 $B\in L(l^2,H)$且使 $I+SB$ 是双射,则$\{\omega_n\}_{n\in N}$是 $H$ 的 Bessel 框架.

**证明** 易知 $T+B\in L(l^2,H)$ 且$(T+B)e_n=\omega_n,n\in N$. 又由 $T\in\Phi(l^2,H)$,知 $T+B\in\Phi(l^2,H)$ 且 $\dim H/\mathrm{ran}(T+B)\leqslant\dim H/\mathrm{ran}T=0$,故 $T+B$ 满. 根据命题 1.1,$\{\omega_n\}_{n\in N}$是 $H$ 的框架且 $T+B$ 是它的预框架算子. 根据命题 1.2,$\{\omega_n\}_{n\in N}$ 是 $H$ 的 Bessel 框架.

**定理 2.2** 设$\{x_n\}_{n\in N}$,$\{\omega_n\}_{n\in N}$,$T$,$S$,$B$ 如定理 2.1 假设,如果 $B\in L(l^2,H)$,且使 $\|B\|<1/\|S\|$,则$\{\omega_n\}_{n\in N}$ 是 $H$ 的 Bessel 框架.

**证明** 由 $\|B\|<1/\|S\|$ 知 $\|SB\|<1$,从而 $I+SB$ 是双射,再由定理 2.1 即证.

**定理 2.3** 设$\{x_n\}_{n\in N}$ 是 $H$ 的 Bessel 框架, $\{\omega_n\}_{n\in N}\subseteq H$,如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|\omega_n-x_n\|^2<\infty$,则$\{\omega_n\}_{n\in N}$ 是$\overline{\mathrm{span}}\{\omega_n\}_{n\in N}$ 的 Bessel 框架.

**证明** 设 $T$ 是$\{x_n\}_{n\in N}$ 的预框架算子,定义 $K:l^2\to H$, 使 $K\{c_n\}_{n\in N}=\sum\limits_{n\in N}c_n(\omega_n-x_n)$,由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|\omega_n-x_n\|^2<\infty$ 知 $K\in L(l^2,H)$. 定义 $K_j:l^2\to H$,使 $K_j\{c_n\}_{n\in N}=\sum\limits_{i=1}^{j}c_i(\omega_i-x_i)$,易



© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

知 $K_j \in L(l^2,H)$，$\dim(\mathrm{ran}K_j) \leqslant j$，故 $K_j$ 是紧的. 再由 $\forall \{c_n\}_{n\in N} \in l^2$，

$$\| K\{c_n\}_{n\in N} - K_j\{c_n\}_{n\in N} \| \leqslant \Big( \sum_{n=j+1}^{\infty} \| \omega_n - x_n \|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \| \{c_n\}_{n\in N} \|_{l^2},$$

知 $K_j$ 依范数收敛于 $K$（当 $j \to \infty$），从而 $K$ 是紧的. 由文献[4]定理 4.2 知 $\{\omega_n\}_{n\in N}$ 是 $\overline{\mathrm{span}}\{\omega_n\}_{n\in N}$ 的框架. 易知 $(T+K)e_n = \omega_n$，$n \in N$，即 $T+K$ 是 $\{\omega_n\}_{n\in N}$ 的预框架算子. 注意到 $T \in \Phi(l^2,H)$，$K \in \kappa(l^2,H)$，故 $T+K \in \Phi(l^2,H)$，根据命题 1.2，$\{\omega_n\}_{n\in N}$ 是 $\overline{\mathrm{span}}\{\omega_n\}_{n\in N}$ 的 Bessel 框架.

**推论 2.4**　设 $\{x_n\}_{n\in N}$ 是 $H$ 的 Riesz 基，$\{\omega_n\}_{n\in N} \subseteq H$，如果 $\sum_{n=1}^{\infty} \| \omega_n - x_n \|^2 < \infty$，则 $\{\omega_n\}_{n\in N}$ 是 $\overline{\mathrm{span}}\{\omega_n\}_{n\in N}$ 的 Riesz 基.

**证明**　$T$，$K$ 如定理 2.3 定义. 由定理 2.3 知 $\{\omega_n\}_{n\in N}$ 是 $\overline{\mathrm{span}}\{\omega_n\}_{n\in N}$ 的 Bessel 框架，且 $T+K$ 是其预框架算子，故 $T+K$ 是满的. 再由 $K$ 紧，即知 $T+K$ 可逆. 因此，$\{\omega_n\}_{n\in N}$ 是 $\overline{\mathrm{span}}\{\omega_n\}_{n\in N}$ 的 Riesz 基.

**推论 2.5**　设 $\{x_n\}_{n\in N}$ 是 $H$ 的 Bessel 框架，框架界为 $A$，$B$，$\{\omega_n\}_{n\in N} \subseteq H$，如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| \omega_n - x_n \|^2 \leqslant R < A,$$

则 $\{\omega_n\}_{n\in N}$ 是 $H$ 的 Bessel 框架.

**证明**　在定理条件下易证 $\{\omega_n\}_{n\in N}$ 是 $H$ 的框架，再由定理 2.3 知 $\{\omega_n\}_{n\in N}$ 是 $H$ 的 Bessel 框架.

## 3　Bessel 框架的几个性质

**定理 3.1**　设 $\{x_n\}_{n\in N}$ 是 $H$ 的 Bessel 框架，如果 $\Delta \subseteq N$ 使 $\sum_{n\in\Delta} \| x_n \|^2 < \infty$，则 $\{x_n\}_{n\in N\setminus\Delta}$ 是 $\overline{\mathrm{span}}\{x_n\}_{n\in N\setminus\Delta}$ 的 Bessel 框架.

特别地，如果 $\Delta \subseteq N$ 是有限集，则 $\{x_n\}_{n\in N\setminus\Delta}$ 是 $\overline{\mathrm{span}}\{x_n\}_{n\in N\setminus\Delta}$ 的 Bessel 框架.

**证明**　令

$$\omega_n = \begin{cases} x_n, & n \in N\setminus\Delta, \\ 0, & n \in \Delta. \end{cases}$$

显然，$\{\omega_n\}_{n\in N} \subseteq H$，且 $\sum_{n\in N} \| \omega_n - x_n \|^2 = \sum_{n\in\Delta} \| x_n \|^2 < \infty$. 根据定理 2.3，$\{\omega_n\}_{n\in N}$ 是 $\overline{\mathrm{span}}\{\omega_n\}_{n\in N}$ 的 Bessel 框架，即 $\{x_n\}_{n\in N\setminus\Delta}$ 是 $\overline{\mathrm{span}}\{x_n\}_{n\in N\setminus\Delta}$ 的 Bessel 框架.

如果 $\Delta \subseteq N$ 是有限集，那么 $\sum_{n\in\Delta} \| x_n \|^2 < \infty$，即证.

**定理 3.2**　设 $\{x_n\}_{n\in N}$ 是 $H$ 的 Bessel 框架，$V \in L(H,K)$ 是可逆的，使 $Vx_n = y_n$，$n \in N$ 则 $\{y_n\}_{n\in N}$ 是 $K$ 的 Bessel 框架.

**证明**　显然 $\{y_n\}_{n\in N}$ 是 $K$ 的框架. 设 $T$ 是 $\{x_n\}_{n\in N}$ 的预框架算子，由 $V$ 可逆且 $VTe_n = y_n$，$n \in N$，知 $VT$ 是 $\{y_n\}_{n\in N}$ 的预框架算子. 再由

$$\dim(\ker VT) = \dim(\ker T) < \infty$$

知，$VT \in \Phi(l^2,K)$，根据命题 1.2，$\{y_n\}_{n\in N}$ 是 Bessl 的.



© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

由框架算子是可逆的即知

**推论 3.3** 设$\{x_n\}_{n\in N}$是 $H$ 的 Bessel 框架，则其典则对偶$\{S^{-1}x_n\}_{n\in N}$也是 $H$ 的 Bessel 框架，其中 $S$ 是$\{x_n\}_{n\in N}$的框架算子.

**推论 3.4** 设$\{x_n\}_{n\in N}$是 $H$ 的 Bessel 框架，则存在 $H$ 的正规 Bessel 框架$\{y_n\}_{n\in N}$与$\{x_n\}_{n\in N}$相似.

**证明** 令 $y_n = S^{\frac{1}{2}}x_n$ 即知，其中 $S$ 是$\{x_n\}_{n\in N}$的框架算子.

**说明** 定理 3.2 表明 Bessel 框架在可逆算子的作用下是稳定的(即仍是 Bessel 的)，如果条件减弱成由有界线性满算子作用，那么就未必稳定. 例如：设$\{x_n\}_{n\in N}$是 $H$ 的就范正交基，显然它是 Bessel 的，令

$$\{y_n\}_{n\in N} = \{x_1,x_1,x_2,x_2,\cdots\} = \{x_n,x_n\}_{n\in N},$$

$T:H\to H$，使 $Tx_n = y_n, n\in N$. 显然 $T\in L(H)$ 是满的，但是$\{y_n\}_{n\in N}$不是 $H$ 的 Bessel 框架.

**定理 3.5** 设$\{x_n\}_{n\in N}$是 $H$ 的框架，$\{y_n\}_{n\in N}$是 $K$ 的 Bessel 框架，如果存在 $V\in L(H,K)$，使 $Vx_n = y_n, n\in N$，则$\{x_n\}_{n\in N}$是 $H$ 的 Bessel 框架.

**证明** 设 $T$ 和 $T_1$ 分别是$\{x_n\}_{n\in N}$和$\{y_n\}_{n\in N}$的预框架算子，故 $VTe_n = T_1e_n, n\in N$，即 $VT = T_1$，从而 $\ker T\subseteq \ker T_1$，因此

$$\dim(\ker T)\leqslant \dim(\ker T_1) < \infty,$$

就有 $T\in\Phi(l^2,H)$. 根据命题 1.2，$\{x_n\}_{n\in N}$是 $H$ 的 Bessel 框架.

**定理 3.6** 设$\{x_n\}_{n\in N}$是 $H$ 的 Bessel 框架，$\{y_n\}_{n\in N}$是$\{x_n\}_{n\in N}$的交错对偶框架，则$\{y_n\}_{n\in N}$也是 Bessel 框架.

**证明** 设 $T$ 和 $T_1$ 分别是$\{x_n\}_{n\in N}$和$\{y_n\}_{n\in N}$的预框架算子，由$\{y_n\}_{n\in N}$是$\{x_n\}_{n\in N}$的交错对偶，故 $TT_1^* = I$(文献[5]定理 3.1). 由$\{x_n\}_{n\in N}$是 Bessel 框架，知 $T\in\Phi(l^2,H)$，又 $I\in\Phi(l^2)$，由[6]定理 4.13.1 知，$T_1^*\in\Phi(H,l^2)$. 从而 $T_1\in\Phi(l^2,H)$. 因此$\{y_n\}_{n\in N}$是 Bessel 框架.

**定理 3.7** 设$\{x_n\}_{n\in N}$和$\{y_n\}_{n\in N}$分别是 $H$ 和 $K$ 的 Bessel 框架，如果$\{x_n\}_{n\in N}$和$\{y_n\}_{n\in N}$弱不相交，则$\{x_n\oplus y_n\}_{n\in N}$是 $H\oplus K$ 的 Bessel 框架.

**证明** 易证$\{x_n\oplus y_n\}_{n\in N}$是 $H\oplus K$ 的 Bessel 序列. 设 $T$ 和 $T_1$ 分别是$\{x_n\}_{n\in N}$和$\{y_n\}_{n\in N}$的预框架算子，由命题 1.2 知 $T\in\Phi(l^2,H)$，$T_1\in\Phi(l^2,K)$，故 $T^*\in\Phi(H,l^2)$，$T_1^*\in\Phi(K,l^2)$，易知：

$$T^*\oplus T_1^*:H\oplus K\to l^2$$
$$x\oplus y\mapsto\{\langle x,x_n\rangle+\langle y,y_n\rangle\}$$

是线性有界的. 因此 $(T^*\oplus T_1^*)^*\in L(l^2,H\oplus K)$，且 $(T^*\oplus T_1^*)^*e_n = x_n\oplus y_n$. 事实上 对 $\forall\, x\oplus y\in H\oplus K$ 有

$$\begin{aligned}\langle (T^*\oplus T_1^*)^*e_n, x\oplus y\rangle &= \langle e_n,\{\langle x,x_j\rangle+\langle y,y_j\rangle\}\rangle\\ &= \langle e_n,\{\langle x,x_j\rangle\}\rangle+\langle e_n,\{\langle y,y_j\rangle\}\rangle\\ &= \overline{\langle x,x_n\rangle}+\overline{\langle y,y_n\rangle} = \langle x_n\oplus y_n, x\oplus y\rangle.\end{aligned}$$

再由 $\overline{\mathrm{span}}\{x_n\oplus y_n\} = H\oplus K$ 知 $(T^*\oplus T_1^*)^*$ 是满的，因此由命题 1.1 知$\{x_n\oplus y_n\}_{n\in N}$是 $H\oplus K$ 的框架，$(T^*\oplus T_1^*)^*$ 是其预框架算子.

下证 $T^*\oplus T_1^*\in\Phi(H\oplus K,l^2)$.



© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

由 $\ker(T^*\oplus^* T_1)=\mathrm{ran}((T^*\oplus T_1^*)^*)^{\perp}=(0)$，知 $\dim\ker(T^*\oplus T_1^*)=0$，易知 $\mathrm{ran}T^*\subseteq\mathrm{ran}(T^*\oplus T_1^*)$，故

$$\dim l^2/\mathrm{ran}(T^*\oplus T_1^*)\leqslant\dim l^2/\mathrm{ran}T^*<\infty.$$

综上所述有 $T^*\oplus T_1^*\in\Phi(H\oplus K,l^2)$，从而 $(T^*\oplus T_1^*)^*\in\Phi(l^2,H\oplus K)$，根据命题 1.2，$\{x_n\oplus y_n\}_{n\in N}$ 是 $H\oplus K$ 的 Bessel 框架.

**推论 3.8** 设 $\{x_{jn}\}_{n\in N}$ 是 Hilbert 空间 $H_j(j=1,2,\cdots,k)$ 的 Bessel 框架，如果 $\{x_{1n}\}_{n\in N}\cdots\{x_{kn}\}_{n\in N}$ 弱不交，则 $\{x_{1n}\oplus x_{2n}\oplus\cdots\oplus x_{kn}\}_{n\in N}$ 是 Hilbert 空间 $H_1\oplus H_2\oplus\cdots\oplus H_k$ 的 Bessel 框架.

## 参考文献：


[1] HOLUB J R. *Pre-frame operators, Bessel frames and near-Riesz bases in Hilbert spaces*[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1994, **122**(3): 779—785.

[2] CASAZZA P G. *The art of frame theory* [J]. Taiwanese J. Math., 2000, **4**(2): 129—201.

[3] HAN De-guang, LARSON D R. *Frames, bases and group representations* [J]. Mem. Amer. Math. Soc., 2000, **697**.

[4] CHRISTENSEN O, HEIL C. *Perturbations of Banach frames and atomic decompositions* [J]. Mach. Nachr, 1997, **185**: 33—47.

[5] LI Shi-dong. *On general frame decompositions* [J]. Numer. Funct. Anal. Optim., 1995, **16**(9-10): 1181—1191.

[6] TAYLOR A E, LAY D C. *Introduction to Functional Analysis* [M]. New York: John Wiley & Sons, 1980, 253—257.


# Bessel frame and its perturbation


ZHOU Jia-yun, GUO Yan-ni, LIU Yu, DING You-zheng

(Dept. of Math., Qufu Normal University, Shandong 273165, China)



**Abstract**: The concept of Bessel frameand proofs the equivalence between Bessel frame and Near-Riesz basis was introduced in [1] together with the feature of its pre-frame operator. This paper explores some properties of Bessel frames and gives some significant result of perturbation and stability.



**Key words**: frame; preframe operator; Bessel frame; Perturbation.





© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.