

声子晶体材料的吸收对弹性波缺陷模的影响*

代洪霞[†] 刘启能

(重庆工商大学计算机与信息工程学院 重庆 400067)

摘要 为了研究声子晶体材料的吸收对缺陷模的影响,引入复波数,推导出二维掺杂声子晶体的转移矩阵,计算了衰减系数和周期数对透射波和反射波中缺陷模的影响。得出:当周期数一定时,衰减系数对二维掺杂声子晶体的透射波和反射波中的缺陷模都有显著的影响,缺陷模的峰值随衰减系数的增加而迅速减小,缺陷模的宽度随衰减系数的增加而增大。当衰减系数一定时,缺陷模的峰值和宽度都随周期数的增加而迅速减小。

关键词 声子晶体, 转移矩阵, 缺陷模, 衰减系数

Effect of absorption of impurity-doped 1D photonic crystal on its elastic wave defect mode

DAI Hong-Xia LIU Qi-Neng

(Calculator Science College of Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067)

Abstract For studying the influence absorption of a 1D photonic crystal on its defect mode,a complex wave number is adopted, the transfer matrix of the impurity-doped 1D photonic crystal is inferred, and the influence of attenuation coefficient and the period number on the defect mode is calculated. When the period number is specified, the attenuation coefficient has obvious influence on the defect mode in the transmission wave and the reflection wave; the peak value of the defect mode decrease quickly while the FWHM of the defect mode increases with increase of attenuation coefficient increment. When the attenuation coefficient is specified, loth the peak value and the FWHM of the defect mode lower quickly with increase of the period number.

Key words Photonic crystal, Transfer matrix, Defect mode, Attenuation coefficient

1 引言

继1987年S. John和E. Yablonovitch提出

光子晶体的概念后^[1,2], M.S.Kushwsha等人于1993年提出了声子晶体的概念^[3]。所谓声子晶体就是其密度和弹性常数呈周期性变化的

2008-09-08 收稿; 2008-12-17 定稿

*重庆市教委科技项目基金资助(KJ080720) 废油资源化与装备教育部工程研究中心重大项目基金(07011302)资助
作者简介:代洪霞(1969-),女,重庆市人,硕士,副教授,从事光学与理论物理研究。

刘启能(1957-),男,教授。

[†]通讯作者:代洪霞, E-mail:fangyudhx@yahoo.com.cn

人造带隙材料。弹性波在声子晶体中传播时会与介质的周期结构发生相互作用，从而产生类似于光波在光子晶体中传播产生的能带。由于利用声子晶体的能带可以十分方便地控制弹性波的传播，因此声子晶体在技术上有广泛的应用前景，如声滤波、噪声隔离、减振等。这使得对声子晶体的研究很快成为人们十分关注的问题^[4-14]。

但在上面提及的文献中都把声子晶体的材料作为对弹性波完全无吸收的材料来处理，而实际上由于声子晶体的材料对弹性波都具有一定阻尼作用，使得声子晶体对弹性波具有一定的吸收作用。这种吸收作用必然会对一维声子晶体的透射系数和反射系数产生很大的影响。因此，为了使声子晶体的理论研究对声子晶体的实际应用更具有指导意义，必须考虑材料的吸收这一重要因素。目前对材料吸收引起的一维声子晶体缺陷模变化的系统研究还未见相关介绍。

为了研究声子晶体材料的吸收弹性波缺陷模的影响，下面引入复波数，推导出一维掺杂声子晶体转移矩阵，并用其计算了声子晶体材料的衰减系数 κ 对一维掺杂声子晶体的反射系数和透射系数的影响。

2 吸收介质中弹性波的处理方法

在无吸收介质中的平面弹性波 $p = Pe^{-i\omega t}$ (压强) 满足亥姆霍兹方程^[15]:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (1)$$

其中 $k = \omega / c$ 为弹性波的波数。

而在具有吸收的介质中，弹性波满足的一维波动方程为^[16]

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{b}{\rho c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) \quad (2)$$

其中 ρ 为密度， b 由黏滞系数决定，是一个很小的量。设试探解 $p = p_0 e^{i(\hat{k}x - \omega t)}$ ，其中 $\hat{k}$ 称复

波数。将试探解代入 (2) 式，解出 $\hat{k}$ (取 b 的一级近似) 为:

$$\hat{k} = \frac{\omega}{c} + i \frac{b\omega^2}{2\rho c^3}; \quad \text{令 } \kappa = \frac{b\omega^2}{2\rho c^3}$$

称 κ 为介质的衰减系数，它描述介质对弹性波的吸收性质，则复波数可表示为:

$$\hat{k} = k + i\kappa \quad (3)$$

在吸收介质中传播的弹性波 $p = p_0 e^{i(\hat{k}x - \omega t)} = p_0 e^{-\kappa x} e^{i(kx - \omega t)}$ 是衰减波 (阻尼波)。这个波也同样满足亥姆霍兹方程:

$$\nabla^2 p + \hat{k}^2 p = 0 \quad (4)$$

比较 (4) 式和 (1) 式可知: 在吸收介质中的弹性波满足的方程与无吸收介质中的弹性波满足的方程在形式上是完全相同的，只不过是复波数 $\hat{k} = k + i\kappa$ 代替了波数 k 。但这代替丰富了弹性波在吸收介质中传播的物理意义，其中波数 k 描述吸收介质中弹性波 $p = p_0 e^{-\kappa x} e^{i(kx - \omega t)}$ 的非吸收传播特性，衰减系数 κ 描述吸收介质中弹性波 $p = p_0 e^{-\kappa x} e^{i(kx - \omega t)}$ 的吸收 (衰减) 特性。这也是处理吸收问题的常用方法^[17]。下面根据在吸收介质中传播的弹性波 $p = p_0 e^{i(\hat{k}x - \omega t)}$ 来研究衰减系数 κ 对一维声子晶体禁带的影响。

3 一维掺杂声子晶体的转移矩阵

一维掺杂声子晶体的结构如图 1 所示，两边的声子晶体由环氧树脂和塑料交替构成，其密度分别为 ρ_1 和 ρ_2 ，其厚度分别为 d_1 和 d_2 ，中间插入一层聚苯乙烯 (杂质) 其密度和厚度分别为 ρ_3 和 d_3 ，两边的周期数都为 N 。该一维掺杂声子晶体置于水中，水的密度为 ρ_0 。由于杂质的厚度比两边的声子晶体的厚度小得多，因此可以只考虑声子晶体的材料的吸收，而不考虑杂质的吸收。设环氧树脂和塑料的衰减系数分别为 κ_1 和 κ_2 。该一维掺杂声子晶体的转移矩阵实际上是由两个

“基本单元”的转移矩阵组合而成：一是弹性波通过界面的转移矩阵；二是弹性波通过同一介质层的转移矩阵。下面分别给予推导，设弹性波正入射。

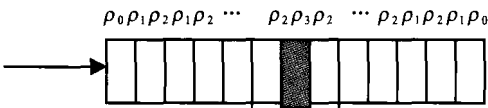


图 1 一维掺杂声子晶体的结构

设平面弹性波在声子晶体中沿 x 轴传播，在无吸收的情况下相邻介质层 i 和 j 内沿 x 轴正、负方向传播的弹性波分别为：

$$\begin{aligned} p_i &= P_i(x)e^{-i\omega t} = (A_ie^{ik_ix} + B_ie^{-ik_ix})e^{-i\omega t}, \\ p_j &= P_j(x)e^{-i\omega t} = (A_je^{ik_jx} + B_je^{-ik_jx})e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

i 和 j 介质层中质点的振动速度分别为：

$$\begin{aligned} u_i &= U_i(x)e^{-i\omega t} = \frac{1}{\rho_ic_i}(A_ie^{ik_ix} - B_ie^{-ik_ix})e^{-i\omega t}, \\ u_j &= U_j(x)e^{-i\omega t} = \frac{1}{\rho_jc_j}(A_je^{ik_jx} - B_je^{-ik_jx})e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

上面式子中有相同的因子 $e^{-i\omega t}$ ，可以忽略。引入二维压强态矢 $\vec{P}_i$ 来表示压强波的两个空间分量：

$$\vec{P}_i = \begin{bmatrix} A_ie^{ik_ix} \\ B_ie^{-ik_ix} \end{bmatrix} \tag{5}$$

压强态矢 $\vec{P}_i$ 通过一个“系统”后转变为压强态矢 $\vec{P}_j$ ， $\vec{P}_i$ 、 $\vec{P}_j$ 可以表示为：

$$\vec{P}_i = M_{ij} \vec{P}_j \tag{6}$$

M_{ij} 为一个 2×2 矩阵，称“系统”的转移矩阵。压强波垂直入射到两介质的界面时，其界面的转移矩阵 M_{ij} 可以由压强 $P(x)$ 和质点的振动速度 $U(x)$ 在界面上满足连续条件推得，如图 2。在界面有：

$$\begin{aligned} A_ie^{ik_ix} + B_ie^{-ik_ix} &= A_je^{ik_jx} + B_je^{-ik_jx} \\ \frac{1}{Z_i}(A_ie^{ik_ix} - B_ie^{-ik_ix}) &= \frac{1}{Z_j}(A_je^{ik_jx} - B_je^{-ik_jx}) \end{aligned}$$

其中 $Z = \rho c$ 为介质的声阻抗。解上两式得 M_{ij} ：

$$M_{ij} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{Z_j + Z_i}{Z_j} & \frac{Z_j - Z_i}{Z_j} \\ \frac{Z_j - Z_i}{Z_j} & \frac{Z_j + Z_i}{Z_j} \end{bmatrix} \tag{7}$$

当压强态矢 $\vec{P}_1$ 通过厚度为 d 的同一介质层变为 $\vec{P}_2$ 时，波的位相变化为 k_id ，其转移矩阵 G_i 容易得到：

$$\vec{P}_1 = G_i \vec{P}_2 = \begin{bmatrix} e^{-ik_id} & 0 \\ 0 & e^{ik_id} \end{bmatrix} \vec{P}_2 \tag{8}$$

由图 1 可知，一维掺杂声子晶体的转移矩阵 M' 为：

$$\begin{aligned} M' &= M_{01}G_1M_{12}G_2M_{21} \cdots M_{23}G_3M_{32} \\ &\cdots M_{12}G_2M_{21}G_1M_{10} \end{aligned} \tag{9}$$

其中 M_{01} 、 M_{10} 、 M_{12} 、 M_{21} 、 M_{23} 、 M_{32} 由 (7) 式给出， G_1 、 G_2 、 G_3 由 (8) 式给出。要考虑声子晶体材料吸收的影响，只需将 G_i 中的 k_i 换为 $\hat{k}_i = k_i + ik_i$ 和 G_2 中的 k_2 换为 $\hat{k}_2 = k_2 + ik_2$ 就可以了。

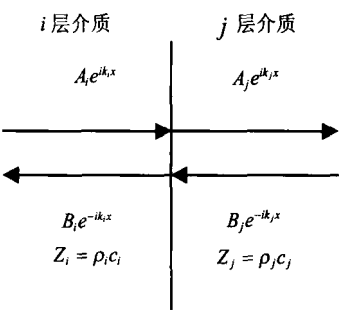


图 2 界面的转移矩阵

设入射空间的态矢 $\vec{P}_0 = [A_0e^{ik_0x}, B_0e^{-ik_0x}]$ ，则出射空间的态矢 $\vec{P}_N = [A_Ne^{ik_0x}, 0]$ ，则：

$$\vec{P}_0 = M' \vec{P}_N = \begin{bmatrix} M'_{11} & M'_{12} \\ M'_{21} & M'_{22} \end{bmatrix} \vec{P}_N \tag{10}$$

由 (10) 式可得，一维掺杂声子晶体透射系数的绝对值 $|t|$ 和反射系数的绝对值 $|r|$ 为：

$$|t| = \left| \frac{A_N}{A_0} \right| = \left| \frac{1}{M'_{11}} \right|; \quad |r| = \left| \frac{B_0}{A_0} \right| = \left| \frac{M'_{21}}{M'_{11}} \right| \tag{11}$$

由(1)~(11)式可以计算材料有吸收情况下一维掺杂声子晶体的透射系数和反射系数,从而研究材料的吸收对一维掺杂声子晶体缺陷模的影响。

4 一维掺杂声子晶体的缺陷模

环氧树脂、塑料、聚苯乙烯和水的密度和纵波波速度分别为: $\rho_1=1180\text{kg/m}^3$, $\rho_2=1850\text{kg/m}^3$, $\rho_3=1060\text{kg/m}^3$, $\rho_0=1000\text{kg/m}^3$, $c_1=2535\text{m/s}$, $c_2=2750\text{m/s}$, $c_3=2350\text{m/s}$, $c_0=1488\text{m/s}$ 。取中心频率 $f_0=10000\text{Hz}$, 则介质1、介质2和杂质中的中心波长分别为: $\lambda_{01}=c_1/f_0$, $\lambda_{02}=c_2/f_0$, $\lambda_{03}=c_3/f_0$ 。取 $d_1=(1/2)\lambda_{01}$, $d_2=(1/2)\lambda_{02}$, $d_3=\lambda_{03}$ 。为了研究方便,引入归一化衰减系数 $g=\kappa_1/k_1$, 并且作近似处理 $\kappa_1/k_1 \approx \kappa_2/k_2$, 下面分别计算归一化衰减系数和声子晶体的周期数对缺陷模的影响。

4.1 衰减系数对缺陷模的影响

周期数 N 取 6, 计算出透射系数和反射系数随归一化衰减系数 g 和频率 f 变化的立体图, 如图 3 和图 4 所示。

由图3可知: 由于掺杂在透射波的禁带中间, 频率为5000Hz处出现了缺陷模。缺陷模随归一化衰减系数 g 的增加而迅速降低, g 在0~0.002 范围内缺陷模比较明显。但随着归一化衰减系数 g 的进一步增加, 缺陷模逐渐模糊。当归一化衰减系数 g 增加到0.01 时, 缺陷模几乎消失。

由图 4 可知: 由于掺杂在反射波的禁带中间, 频率为 5000Hz 处也出现了缺陷模。缺陷模随归一化衰减系数 g 的增加而迅速减弱, g 在 0~0.002 范围内缺陷模比较明显。但随着归一化衰减系数 g 的进一步增加, 禁带的顶部逐渐降低, 缺陷模的不再明显。当归一化衰减系数 g 增加到 0.01 时, 缺陷模几

乎消失。

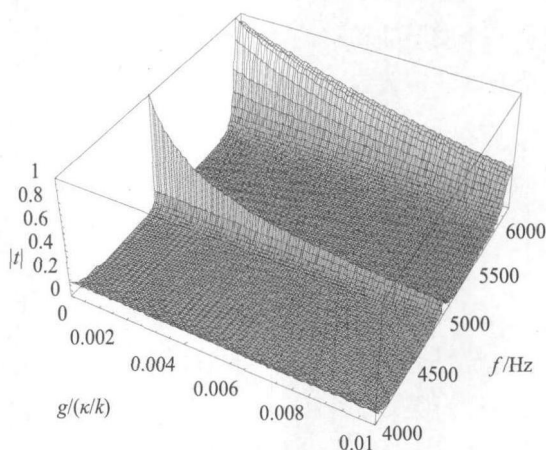


图3 透射系数随归一化衰减系数和频率变化的立体图

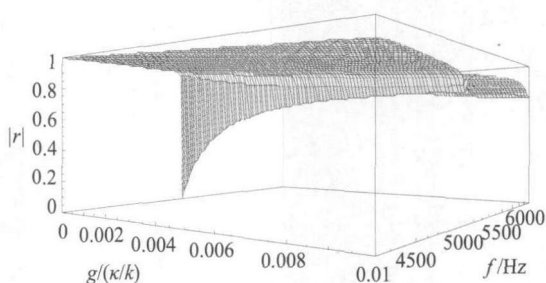


图4 反射系数随归一化衰减系数和频率变化的立体图

为了进一步看清缺陷模随归一化衰减系数 g 的变化特征, g 分别取 $g=0$ (无吸收)、 $g=0.002$ 、 $g=0.005$ 作图3和图4的左视切面图, 从而得到缺陷模随频率的响应曲线, 如图5和图6。图5和图6中细线、中粗线、粗线分别对应 $g=0$ 、 $g=0.002$ 、 $g=0.005$ 的情况。

由图5可知: 在透射波中, 当 $g=0$ (无吸收) 时, 缺陷模的峰高为1, 其半高宽为15Hz。当 $g=0.002$ 时, 缺陷模的峰高降为0.43, 其半高宽增大为35Hz。当 $g=0.005$ 时, 缺陷模的峰高降为0.22, 其半高宽增大为60Hz。

由图6可知: 在反射波中, 当 $g=0$ (无吸收) 时, 缺陷模的波谷值为0, 其半高宽为

5Hz，禁带顶高为1。当 $g=0.002$ 时，缺陷模的波谷值升为0.55，其半高宽增大为20Hz，禁带顶高降为0.97。当 $g=0.005$ 时，缺陷模的波谷值升0.7，其半高宽增大为42Hz，禁带顶高降为0.92。

对缺陷模的影响也很大。当 $N=6$ 时，缺陷模的波谷为0.26，其半高宽为12Hz。当 $N=7$ 时，缺陷模的波谷升为0.47，其半高宽减少为5Hz。当 $N=8$ 时，缺陷模的波谷升为0.74，其半高宽减少为3Hz。

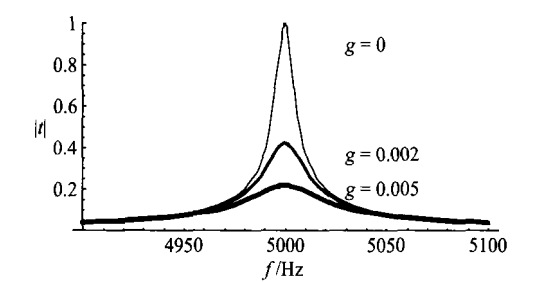


图 5 缺陷模随频率的响应曲线

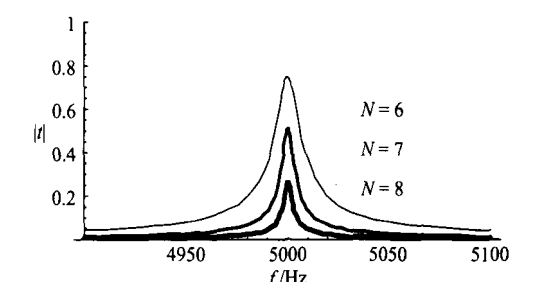


图 7 缺陷模随频率的响应曲线 ($N=6、7、8$)

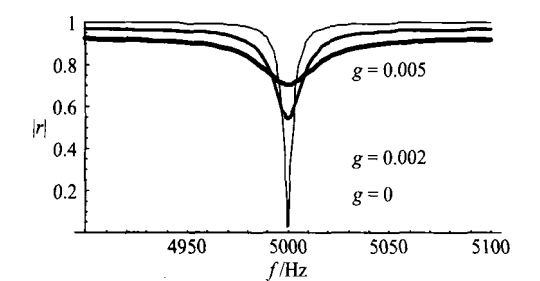


图 6 缺陷模随频率的响应曲线

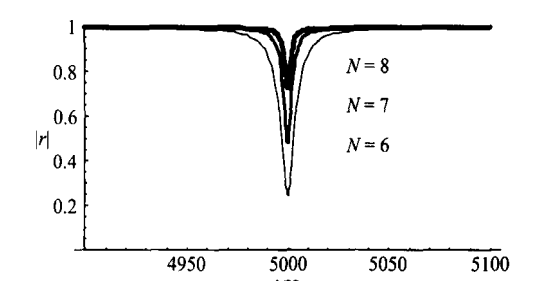


图 8 缺陷模随频率的响应曲线 ($N=6、7、8$)

4.2 周期数对缺陷模的影响

声子晶体的周期数 N 直接反映弹性波被材料吸收的深度，因此声子晶体的周期数的变化必然影响缺陷模的变化。在频率为 f_0 处，取 $g=0.0005$ ，分别计算出周期数为6、7、8 时透射波和反射波中缺陷模随频率的响应曲线，如图7和图8。在图7和图8中细线、中粗线、粗线分别对应 $N=6、7、8$ 的情况。

由图7可知：在透射波中周期数的变化对缺陷模的影响很大。当 $N=6$ 时，缺陷模的峰高为0.75，其半高宽为20Hz。当 $N=7$ 时，缺陷模的峰高降为0.52，其半高宽减少为10Hz。当 $N=8$ 时，缺陷模的峰高降为0.26，其半高宽减少为6Hz。

由图8可知：在反射波中周期数的变化

容易估算，上述缺陷模随衰减系数和周期数的变化的数值计算结果和理论上的预期是一致的：因为在吸收介质中弹性波 $p=p_0e^{-\kappa x}e^{i(kx-\omega t)}$ 其吸收由衰减因子 $e^{-\kappa x}$ 决定，缺陷模的峰值也由衰减因子 $e^{-\kappa x}$ 决定。因此影响缺陷模的峰值便取决于衰减系数 κ 和介质厚度 x ，而介质厚度正比于周期数。这样就引起了缺陷模的峰值随衰减系数和周期数的增大而减小的结果。

5 结论

上面通过引入复波数，推导出考虑了声子晶体材料吸收的一维掺杂声子晶体的转移矩阵，计算了归一化衰减系数和声子晶体的

周期数对缺陷模的影响。得出：当周期数一定时，归一化衰减系数对一维掺杂声子晶体的透射波和反射波中的缺陷模都有显著的影响，缺陷模的峰值随归一化衰减系数的增加而迅速减小，缺陷模的宽度随归一化衰减系数的增加而增大。当归一化衰减系数一定时，周期数对一维掺杂声子晶体的透射波和反射波中的缺陷模也有显著的影响，缺陷模的峰值和宽度都随周期数的增加而迅速减小。

由于声子晶体材料的吸收对一维掺杂声子晶体的缺陷模有着明显的影响，因此在利用一维掺杂声子晶体来设计声学器件（滤波器）时，必须充分考虑声子晶体材料吸收这一重要因素，才能得到与实际相符合的结果。

参 考 文 献

- [1] Ei Yablonovitch. Inhibited spontaneous emission in solid - state physics and electronics. *Phys. Rev.Lett.* 1987, 58(20): 2059-2061.
- [2] Sajeev John. Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices. *Phys. Rev.Lett.* 1987, 58(23): 2486-2489.
- [3] Kushwaha M S ,Acoustic band-structure of periodic elastic composites. *Phys. Rev.Lett.* 1993, 71(13): 2022-2025.
- [4] Pi-Guang Luan,Zhen Ye.Acoustic waves propagatin in 1D mutilavered system. *Phys. Rev. E* 2001, 63: 066611-066622.
- [5] Jesen J S. Phononic band gaps and vibrations in one- and two-dimensional mass-spring structures. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 266(5): 1053-1078.
- [6] Wang Gang, Yu Dianlong, Wen Jihong, One- dimensional phononic crystals with locally resonant structures. *Physics Letters A*, 2004, 327(5-6): 512-521.
- [7] Martin H, Small-size sonic crystals with strong attenuation bands in the audible frequency range, *Applied physics Letters* 2004, 84(17): 3364-3366.
- [8] Hou Zhilin, Fu XiuJun, Liu Youyan. Singularity of the Bloch theorem in the fluid/solid phononic crystal. *Physical Review B*, 2005, 71(2): 024304-024309.
- [9] Benchabanel S,Khelilif A,Choujaul A, Interaction of wave guide and localized modes in a phononic crystal *Europhysics Letters*, 2006, 72(4): 570-575.
- [10] 曹永军, 董纯红, 周培勤. 一维准周期结构声子晶体透射性质的研究, *物理学报*, 2006, 55(12): 6470-6473.
- [11] 温激鸿, 王刚, 刘耀宗. 基于集中质量法的一维声子晶体弹性波带隙计算, *物理学报*, 2004, 53(10): 3384-3387.
- [12] 王文刚, 刘正猷, 赵德刚. 声波在一维声子晶体中共振隧穿的研究, *物理学报*, 2006, 55(9): 4744-4747.
- [13] 刘启能, 一维声子晶的传输特性, *人工晶体学报*, 2008, 37(1): 179-182.
- [14] 刘启能, 多通道声子晶滤波器的理论研究振动与冲击, 2008, 27(3): 117-120.
- [15] 马大猷, 现代声学理论基础, 科学出版社, 2004 版: 17.
- [16] 马大猷, 现代声学理论基础, 科学出版社, 2004 版: 30.
- [17] 玻恩, 沃耳夫, 光学原理, 电子工业出版社, 2006 版(第七版): 615.